EX. 1 | Réf. 4465

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et : } \qquad (\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2^k}{3^{k+1}}$$

Y désigne une variable aléatoire indépendante de X suivant la même loi que X et définie aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Vérifier que la relation $(\star)$ permet bien de définir une loi de probabilité.
2. On définie la variable aléatoire Z par $Z = X + Y$.
   a. Quelle est la loi de Z ?
   b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $S = \dfrac{1}{1+Z}$.
   c. En remarquant que $\dfrac{X}{1+Z} + \dfrac{Y}{1+Z} + S = 1$, déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\dfrac{X}{1+Z}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4465

1. On a que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$ et comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = k]) \geq 0$, cela définit bien une loi de probabilité.
2. Comme les variables aléatoire X et Y sont indépendantes, il vient que :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z = n]) &= \mathbb{P}([X + Y = n]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}([X = k] \cap (Y = n-k])\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}} \times \frac{2^{n-k}}{3^{n-k+1}} \\ &= \frac{(n+1)2^n}{3^{n+2}}\end{aligned}$$
3. En utilisant le théorème de transfert, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}([Z = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$
4. Comme X et Y suivent la même loi, il vient par symétrie que :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{X}{1+Z}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{X}{1+X+Y}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{Y}{1+X+Y}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{Y}{1+Z}\right)\end{aligned}$$
On en déduit que $2\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{1+Z}\right) + \mathbb{E}(S) = 1$ d'ù $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{1+Z}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(S))$ ce qui donne $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{1+Z}\right) = \dfrac{1}{3}$.