EX. 1 | Réf. 4464

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4464

1. X prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.
   - $[X = 1]$: « obtenir une boule blanche au premier tirage », donc $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{n}{n+2}$.
   - $[X = 2]$: « obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au second tirage » donc $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+1}$ puisque les tirages se font sans remise.
   - $[X = 3]$: « obtenir une boule noire lors de chacun des deux premirs tirages, puis une boule blanche au troisiême tirage » ce qui donne sur le même principe que précédemment $\mathbb{P}([X = 3]) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n}{n}$
2. Y prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n+1\}$. Soit alors $k \in \{1, \dots, n+1\}$. L'événement $[Y = k]$ correspond au tirage des $(n+2)$ boules ù les $(k-1)$ premiêres boules tirées ne sont ni la boule blanche numérotée 1, ni la boule noire numérotée 1, mais ù par contre la kᵉ boule tirée est soit la boule blanche numérotée 1 soit la boule noire numérotée 1.

   On a donc, pour les $(k-1)$ premiêres boules tirées, $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la kᵉ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

   Donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = k]) &= \frac{\dbinom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{n+2} \\ &= \frac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$