Exercice| [4393] | 1| Théorème de transfert et calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

Pistes de réflexion

- Il s'agit de montrer que la série numérique $\sum k^2(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente pour assurer l'existence de $\mathbb{E}(Z)$.
- On pourra utiliser le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières pour en calculer la somme, en remarquant que $k^3 = k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k$ et $k^2 = k(k-1)+k$

Éléments de correction

X est une variable aléatoire discrète, donc d'après le théorème du transfert, la variable aléatoire $Z = X^2(X-1)$ admet une espérance si la série numérique $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} k^2(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente.
Puisque X suit une loi géométrique de paramètre p, il s'agit d'étudier la convergence absolue de la série numérique $p\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} k^2(k-1)(1-p)^{k-1}$ et en calculer sa somme.

Étude de la convergence de la série numérique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} k^2(k-1)\mathbb{P}([X=k])$: on pourra remarquer qu'il s'agit d'une série à termes positifs, et même strictement positifs à partir du rang 2.
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il vient :

$$\frac{(k+1)^2((k+1)-1)(1-p)^{(k+1)-1}}{k^2(k-1)(1-p)^{k-1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^3}{k^3}\times(1-p) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1-p<1$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série numérique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} k^2(k-1)\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente, et par suite, la variable aléatoire $Z = X^2(X-1)$ admet une espérance.

Calcul de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2(k-1)\mathbb{P}([X=k])$: en remarquant que : $\forall k\in\mathbb{N},\quad k^3 = k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k$ et $k^2 = k(k-1)+k$, il vient :

$$\begin{aligned}
p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(k-1)(1-p)^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k^3-k^2\right)(1-p)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k-k(k-1)-k\right)(1-p)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k(k-1)(k-2)+2k(k-1)\right)(1-p)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-1}+2k(k-1)(1-p)^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, les séries entières $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$, $\sum n(n-1)x^{n-2}$ et $\sum n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ sont toutes quatre de rayon de convergence égal à 1. Ainsi, pour tout $x\in]-1;1[$, les séries numériques $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$, $\sum n(n-1)x^{n-2}$ et $\sum n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ sont convergentes.
De plus, si l'on note S la somme sur $]-1;1[$ de la série entière $\sum x^n$, c'est à dire que :

$$\forall x\in]-1;1[,\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

il vient : $\forall x\in]-1;1[,$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} &= S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\\
\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} &= S''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}\\
\sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} &= S'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}
\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(k-1)(1-p)^{k-1} &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-1} + 2p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-1} + 2p\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1}\\
&= p(1-p)^2\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-3} + 2p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-\\
&= p(1-p)^2\times\frac{6}{(1-(1-p))^4} + 2p(1-p)\times\frac{2}{(1-(1-p))^3}\\
&= \frac{6(1-p)^2}{p^3}+\frac{4(1-p)}{p^2}\\
&= \frac{2p^2-8p+6}{p^3}
\end{aligned}$$