Exercice| [4366] | 1| Étude du temps d'attente lors d'un lancer de dés

On lance trois dés à six faces numérotées de un à six parfaitement équilibrés, jusqu'à obtenir « trois six », sachant que dès qu'un dé tombe sur un « six », on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un « six ».
On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un « six » sur le premier dé.
On définit sur le même principe X_2 et X_3 pour les deux autres dés.

(1). Quelles sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?

(2). Soit $i \in \{1,2,3\}$. Déterminer $\mathbb{P}([X_i \leq k])$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

(3). Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les « trois six ».
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([X \leq k])$ en admettant que les événements $[X_1 \leq k]$, $[X_2 \leq k]$ et $[X_3 \leq k]$ sont indépendants.

(4). En déduire la loi de la variable X.

(5). Déterminer, si elle existe, l'espérance mathématique de X.

Pistes de réflexion

(1). X_1 est clairement le temps d'attente du premier succès dans la répétition de la même épreuve de Bernoulli, ou on peut établir la loi de X_1 en considérant les événements succès de chaque lancer.

(2). Il s'agit de calculer la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}([X_i = j])$.

(3). On remarquera que $X = \max(X_1, X_2, X_3)$ et que $[X \leq k] = [X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k] \cap [X_3 \leq k]$.

(4). On rappelle le lien $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k-1])$ pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(5). Il s'agit d'établir la convergence absolue d'une série numérique et d'en calculer la somme.

Éléments de correction

(1). **Support de X_1 :** il est nécessaire de lancer au moins une fois le dé. Par ailleurs, on peut obtenir la face numérotée six dès le premier lancer, comme devoir lancer ce dé indéfiniement. Ainsi $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Loi de X_1 : en notant $S_k^{(1)}$ l'événement « on a obtenu le six avec le dé numéro 1 lors du k^elancer », on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_1 = k]) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{P}\left(\overline{S_1^{(1)}} \cap \overline{S_2^{(1)}} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}^{(1)}} \cap S_k^{(1)}\right) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \mathbb{P}([X_1 = k]) &= \mathbb{P}\left(\overline{S_1^{(1)}} \cap \overline{S_2^{(1)}} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}^{(1)}} \cap S_k^{(1)}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{S_1^{(1)}}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{S_1^{(1)}}}\left(\overline{S_2^{(1)}}\right) \times \ldots \\
&\quad \times \mathbb{P}_{\overline{S_1^{(1)}} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-2}^{(1)}}}\left(\overline{S_{k-1}^{(1)}}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{S_1^{(1)}} \cap \ldots \overline{S_{k-1}^{(1)}}}\left(S_k^{(1)}\right) \\
&= \underbrace{\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \ldots \frac{5}{6}}_{k-1 \text{ facteurs}} \times \frac{1}{6} \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

On remarque que cette relation est encore valable pour $k = 1$ et ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_1 = k]) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6}$

En conséquence, X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

Lois de X_2 et X_3 : sur le même principe, on montrerait que X_2 et X_3 suivent aussi une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

(2). Soit $i \in \{1,2,3\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que : $[X_i \leq k] = [X_i = 1] \cup [X_i = 2] \cup \ldots \cup [X_i = k]$
Étant donné que cette réunion est une réunion d'événements disjoints, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i \leq k]) &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}([X_i = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{j} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 - \frac{5}{6}} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{\frac{1}{6}} \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k
\end{aligned}$$

(3). Compte-tenu de la définition de X, on a : $X = \max(X_1, X_2, X_3)$ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puisque l'on doit lancer les trois dés au moins une fois, que le cas le plus favorable sera que dès le premier jet des trois dés on obtienne les trois faces numérotées six, comme il sera aussi possible de devoir lancer le dé indéfiniement.
Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$. On a que : $[X \leq k] = [X_1 \leq] \cup [X_2 \leq k] \cup [X_3 \leq k]$.
Ainsi, puisque les trois événements $[X_1 \leq k]$, $[X_2 \leq k]$ et $[X_3 \leq k]$ sont supposés indépendants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leq k]) &= \mathbb{P}([X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k] \cap [X_3 \leq k]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 \leq k]) \times \mathbb{P}([X_2 \leq k]) \times \mathbb{P}([X_3 \leq k]) \\
&= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \times \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \times \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \\
&= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^3
\end{aligned}$$

(4). Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\mathbb{P}([X = k]) = \begin{cases} \mathbb{P}([X = 1]) \text{ si } k = 1 \\ \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k-1]) \text{ si } k \geq 2 \end{cases}$

Supposons donc que $k \geq 2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}([X \leq k]) - \mathbb{P}([X \leq k-1]) \\
&= \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^3 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)^3 \\
&= 1 - 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^k + 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} - \left(\frac{5}{6}\right)^{3k} \\
&\quad - \left(1 - 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-2} - \left(\frac{5}{6}\right)^{3k-3}\right) \\
&= 3 \times \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k + 3 \times \left(\frac{25}{36}\right)^k - 3 \times \frac{36}{25} \times \left(\frac{25}{36}\right)^k \\
&\quad -3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^k - \left(\frac{125}{216}\right)^k + \frac{216}{125} \times \left(\frac{125}{216}\right)^k \\
&= \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k - \frac{33}{25} \times \left(\frac{25}{36}\right)^k + \frac{91}{125} \times \left(\frac{125}{216}\right)^k
\end{aligned}$$

(5). La variable aléatoire X admet une espérance si la série numérique $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} k \times \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui revient à étudier la convergence de la série $\sum\limits_{k \geq 1} k \times \mathbb{P}([X = k])$.

On remarque que le terme général de la série numérique $\sum\limits_{k \geq 1} k\mathbb{P}([X = k])$ est constitué de termes de la forme kq^k où $q \in \left\{\frac{5}{6}, \frac{25}{36}\right\}$ et où $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$ et $\left|\frac{25}{36}\right| < 1$.

Or on sait que les séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^n$ sont de même rayon de convergence égal à 1. Ainsi, les séries numériques $\sum kq^k$ considérées sont absolument convergentes, et par somme de séries convergentes, la série numérique $\sum\limits_{k \geq 1} k \times \mathbb{P}([X = k])$ est convergente, et comme elle est à termes positifs, elle est absolument convergente.

Ainsi X admet une espérance.

De plus d'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, les séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^{n-1}$ ont le même rayon de convergence, ici 1, et si on note S la somme de la série entière $\sum x^n$ sur l'intervalle ouvert de convergence, on a :

$\forall x \in]-1;1[, \quad S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

Puisque : $\forall x \in]-1;1[, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on en déduit que : $\forall x \in]-1;1[, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \mathbb{P}([X = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k - \frac{33}{25} \times \left(\frac{25}{36}\right)^k + \frac{91}{125} \times \left(\frac{125}{216}\right)^k\right) \\
&= \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{5}{6}\right)^k - \frac{33}{25} \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{25}{36}\right)^k + \frac{91}{125} \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{125}{216}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{11}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} + \frac{91}{216} \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{125}{216}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} - \frac{11}{12} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{25}{36}\right)^2} + \frac{91}{216} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{125}{216}\right)^2} \\
&= \frac{10566}{1001}
\end{aligned}$$