Exercice| [4367] | 1| Étude d'un premier rang d'apparition lors d'une succession de lancers

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc « pile » ou « face » avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.
On note $P_k$ (respectivement $F_k$) l'événement : « on obtient pile (respectivement face) au $k^e$ lancer ».
On note $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur $k$ si l'on obtient pour la première fois « pile » puis « face » dans cet ordre aux lancers $k-1$ et $k$, où $k$ désigne un entier supérieur ou égal à 2. $X$ prend la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

**(1).** Calculer $\mathbb{P}([X=2])$.

**(2).** En remarquant que $[X=3]=(P_1\cap P_2\cap F_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)$, calculer $\mathbb{P}([X=3])$.

**(3).** Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 3.
Écrire lévénement $[X=k]$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.

**(4).** Déterminer alors $\mathbb{P}([X=k])$ pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2.

**(5).** Calculer alors $\mathbb{P}([X=0])$. Comment interpréter ce résultat ?

Pistes de réflexion

**(1).** C'est immédiat que $[X=2]=P_1\cap F_2$ et la formule des probabilités composées permet de conclure.

**(2).** Il s'agit ici d'analyser comment obtenir le premier basculement « Pile/face » lors du troisième lancer, puis de conclure à l'aide de la formule des probabilités composées.

**(3).** On généralise le raisonnement précédent en écrivant l'événement $[X=k]$ à l'aide des événements $(P_1,\ldots,P_k)$ et $(F_1,\ldots,F_k)$.

**(4).** On écrira la formule des probabilités composées pour chacun des termes obtenus à l'aide de la décomposition de $[X=k]$ disjointe obtenue à la question précédente.

**(5).** On remarquera que $[X=0]$ ne peut se produire que si aucun des événements $[X=k]$ avec $k\neq 0$ ne se produisent.

Éléments de correction

**(1).** D'après la définition de la variable aléatoire $X$, on a : $[X=2]=P_1\cap F_2$.
Ainsi, il vient d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=2]) &= \mathbb{P}(P_1\cap F_2)\\ &= \mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}_{P_1}(F_2)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

**(2).** Pour avoir l'évément $[X=3]$, il faut avoir « Pile » et « Face » aux deuxième et troisième lancers, ce qui réduit les possibilités aux tirages $PPF$ et $FPF$, pour lesquels on a réalisation de l'événement $[X=3]$.
Ainsi, on bien : $[X=3]=(P_1\cap P_2\cap F_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)$ cette union étant disjointe.
Il vient donc que : $\mathbb{P}([X=3])=\mathbb{P}(P_1\cap P_2\cap F_3)+\mathbb{P}(F_1\cap P_2\cap F_3)$.
Par suite d'après la formule des probabilités composées, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=3]) &= \mathbb{P}(P_1\cap P_2\cap F_3)+\mathbb{P}(F_1\cap P_2\cap F_3)\\ &= \mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}_{P_1}(P2)\times\mathbb{P}_{P_1\cap P_2}(F_3)+\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}_{F_1}(P_2)\times\mathbb{P}_{F_1\cap P_2}(F_3)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

**(3).** Soit $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. L'événement $[X=k]$ ne peut se produire que si le $(k-1)^e$ lancer donne « Pile » et le $k^e$ donne « Face », et il est impossible lors des lancers précédents d'avoir un basculement « Pile/Face » puisque c'est le premier basculement que l'on étudie.

$$\begin{aligned}[X=k] &= P_1\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k\\ &\cup\ F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k\\ &\cup\ F_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k\\ &\ \vdots\quad\vdots\\ &\cup\ F_1\cap\ldots\cap F_{k-2}\cap P_{k-1}\cap F_k\end{aligned}$$

**(4).** Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Puisque : 
$$\begin{aligned}[X=k] &= P_1\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k\\ &\cup\ F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k\\ &\cup\ F_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k\\ &\ \vdots\quad\vdots\\ &\cup\ F_1\cap\ldots\cap F_{k-2}\cap P_{k-1}\cap F_k\end{aligned}$$
et que cette réunion est disjointe, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \mathbb{P}(P_1\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k)\\ &+\ \mathbb{P}(F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k)\\ &+\ \mathbb{P}(F_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots\cap P_{k-1}\cap F_k)\\ &\ \vdots\\ &+\ \mathbb{P}(F_1\cap\ldots\cap F_{k-2}\cap P_{k-1}\cap F_k)\end{aligned}$$

et donc d'après la formule des probabilités composées pour chaque terme :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([X=k]) & = & \mathbb{P}(P_1)\times\ldots\times\mathbb{P}_{P_1\cap\ldots P_{k-2}}(P_{k-1})\times\mathbb{P}_{P_1\cap\ldots\cap P_{k-1}}(F_k)\\
& + & \mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}_{F_1}(P_2)\times\ldots\times\mathbb{P}_{F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_{k-2}}(P_{k-1})\times\mathbb{P}_{F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_{k-1}}(F_k)\\
& + & \mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}_{F_1}(F_2)\times\mathbb{P}_{F_1\cap F_2}(P_3)\times\mathbb{P}_{F_1\cap F_2\cap P_3}(P_4)\times\ldots\times\mathbb{P}_{F_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots P_{k-2}}(P_{k-1})\times\mathbb{P}_{F_1\cap F_2\cap P_3\cap\ldots P_{k-1}}(F_k)\\
& & \vdots\\
& + & \mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}_{F_1}(F_2)\times\ldots\times\mathbb{P}_{F_1\cap\ldots F_{k-2}}(P_{k-1})\times\mathbb{P}_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-2}\cap P_{k-1}}(F_k)\\
& = & \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}}_{\text{il y a } k \text{ facteurs}}\\
& + & \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}}_{\text{il y a } k \text{ facteurs}}\\
& & \vdots\\
& + & \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}}_{\text{il y a } k \text{ facteurs}}\\
& = & \underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{\text{il y a } k-1 \text{ termes}}\\
& = & \frac{k-1}{2^k}
\end{array}$$

**(5).** L'événement $[X=0]$ se produit si aucun des événements $[X=k]$ ne se produit. Autrement dit, les événements $[X=k]$ étant incompatibles, on a $\mathbb{P}([X=0]) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k])$.

Or, on a :
$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{2^k} & = & \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{2^{k-2}}\\
& = & \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\
& = & \frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\
& = & 1
\end{array}$$

Il vient alors que $\mathbb{P}([X=0])=0$ ce qui signifie que l'événement $[X=0]$ est négligeable.