Exercice| [4361] | 1| Étude d'un lancer de deux pièces conditionné par le résultat précédent

Soit $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.
On considère A_1 et A_2 deux pièces de monnaies non équilibrées où la probabilité d'obtenir « Face » avec la pièce A_i est p_i.
On effectue alors une succession de lancers avec ces deux pièces selon le protocole suivant :

— Pour la première partie, on choisit une pièce au hasard, ce choix étant équiprobable. On lance alors la pièce choisie.
— Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on obtient « Face » lors de la n^e partie, on joue la suivante avec la pièce A_1, sinon, on joue la partie suivante avec la pièce A_2.
On notera alors u_n la probabilité d'obtenir « Face » lors de la n^e partie.

On suppose que cette expérience aléatoire peut-être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(1). Exprimer u_1 et u_2 en fonction de p_1 et p_2.

(2). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

(3). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat de la n^e partie est « Face » et 0 si le résultat est « Pile ».

(a). Déterminer la loi de X_n. En déduire son espérance mathématique.

(b). À quelle condition sur p_1 et p_2 les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont-ils indépendants ?

Pistes de réflexion

(1). On pourra faire intervenir un système complet d'événements portant sur le choix de la première pièce pour exprimer u_1, et un autre faisant intervenir le résultat du premier lancer pour exprimer u_2.

(2). On adoptera une démarche similaire pour exprimer u_n en fonction de p_1 et p_2.

(3). (a). Puisque $X_n(\Omega) = \{0,1\}$, il s'agit d'une variable aléatoire de Bernoulli dont il suffit d'identifier le paramètre.

(b). Il s'agit de déterminer une condition nécéssaire et suffisante pour avoir $\mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Éléments de correction

On définit les événements :

A_1 : « on joue avec la pièce A_1 »
A_2 : « on joue avec la pièce A_2 »
F_k : « on a obtenu « Fac » au k^elancer »

(1). On considère le système complet d'événements $\{A_1, A_2\}$ où ni A_1 ni A_2 ne sont de probabilité nulle. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbb{P}(F_1) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(F_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_2}(F_1) \\ &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \end{aligned}$$

De même en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{F_1, \overline{F_1}\}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathbb{P}(F_2) \\ &= \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}_{F_1}(F_2) + \mathbb{P}\left(\overline{F_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2) \\ &= u_1 p_1 + (1 - u_1)\, p_2 \\ &= u_1 (p_1 - p_2) + p_2 \\ &= \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2 \end{aligned}$$

(2). En appliquant cette fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{F_n, \overline{F_n}\}$, on trouve de même que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(F_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_n)\,\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\overline{F_n}\right)\mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \\ &= u_n p_1 + (1 - u_n)\, p_2 \\ &= (p_1 - p_2)\, u_n + p_2 \end{aligned}$$

(3). (a). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre u_n, c'est à dire $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ avec $\mathbb{P}([X_n = 1]) = u_n$ et $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - u_n$. On en déduit donc que son éspérance est u_n.

(b). On a directement que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]]) &= u_1 u_2 \\ &= \frac{p_1 + p_2}{2}\left(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2\right) \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 1])\,\mathbb{P}_{[X_2=1]}([X_2 = 1]) \\ &= u_1 p_1 \\ &= \frac{p_1\,(p1 + p2)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{p_1\,(p_1 + p_2)}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2}\left(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2\right) \\ \Leftrightarrow\ & (p_1 + p_2 = 0 \text{ ou } p_1 - p_2 = 0 \text{ ou } p + 1 + p_2 = 2) \\ \Leftrightarrow\ & p_1 = p_2 \text{ puisque } (p_1, p_2) \in]0,1[^2 \end{aligned}$$