Exercice | [4357] | 1 | Modélisation d'un service d'urgence

Le nombre N de blessés arrivant aux urgences médicales un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 6, où l'on suppose que les victimes sont réparties uniformément entre les deux sexes.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de femmes qui figurent parmi les blessés ce jour là, et Y le nombre d'hommes.

(1). Déterminer les lois de probabilités de X et Y. Préciser ensuite leurs espérances mathématiques et leurs variances.

(2). Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

(3). En déduire la probabilité qu'il y ait autant de femmes que d'hommes blessés ce jour-là aux urgences.

Pistes de réflexion

(1). On remarquera que $[X=k] = \bigcup_{n\geq k} ([X=k]\cap[Y=n-k])$ et que $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 6.

(2). On montrera que $\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \mathbb{P}([X=x])\times\mathbb{P}([Y=y])$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

(3). On commencera par remarquer que $[X=Y] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} ([X=k]\cap[Y=k])$.

Éléments de correction

(1). **Support de X :** le nombre de femmes qui se présente aux urgences est conditionné par le nombre N de personnes qui se présentent aux urgences et donc le support de la variable aléatoire X conditionnée par la variable aléatoire N est $[\![0;N]\!]$. Toutefois N suit une loi de Poisson, on a donc $N(\Omega)=\mathbb{N}$, et par suite $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

Loi de X : soit $k\in X(\Omega)=\mathbb{N}$.

Les événement $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, il vient d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]\cap[N=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n])\times\mathbb{P}_{[N=n]}([X=k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-6}\frac{6^n}{n!}\times\mathbb{P}_{[N=n]}([X=k])
\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, sachant l'événement $N=n$ la variable aléatoire qui compte le nombre de femmes se présentant au service des urgences suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$. Ainsi, il vient :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}([X=k]) = \begin{cases} \binom{n}{k}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \text{ si } k\leq n \\ 0 \text{ si } k>0 \end{cases}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=k]) &= \mathrm{e}^{-6}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{6^n}{n!}\times\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \mathrm{e}^{-6}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}\times\frac{n!}{k!((n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{3^n}{k!(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{n+k}}{k!n!} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\times\frac{3^k}{k!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\times\frac{3^k}{k!}\times\mathrm{e}^{3} \\
&= \mathrm{e}^{-3}\times\frac{3^k}{k!}
\end{aligned}$$

et par suite X suit une loi de Poisson de paramètre 3.
On en déduit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)=3$ et une variance $\mathbb{V}(X)=3$.
Un raisonnement analogue donnerait que Y suit une loi de Poisson de paramètre 3.

(2). Les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque :

$$\forall(h,\ell)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=h])\times\mathbb{P}([Y=\ell]) = \mathbb{P}([X=h]\cap[Y=\ell])$$

Soit alors $(h,\ell)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

On a directement que :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=h])\times\mathbb{P}([Y=\ell]) &= \mathrm{e}^{-3}\frac{3^h}{h!}\times\mathrm{e}^{-3}\frac{3^\ell}{\ell!} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\frac{3^{h+\ell}}{h!\ell!}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque les événements $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=h]\cap[Y=\ell]) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=h]\cap[Y=\ell]\cap N=n) \\
&= \mathbb{P}([X=h]\cap[N=\ell+h]) \\
&= \mathbb{P}([N=\ell+h])\times\mathbb{P}_{[N=\ell+h]}([X=h]) \\
&= \mathrm{e}^{-6}\frac{6^{\ell+h}}{(\ell+h)!}\times\binom{\ell+h}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+h} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\frac{3^{\ell+h}}{(\ell+h)!}\times\frac{(\ell+h)!}{h!\,((\ell+h)-h)!} \\
&= \mathrm{e}^{-6}\frac{3^{\ell+h}}{h!\ell!}
\end{aligned}$$

Par suite, les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(3). On a $[X=Y] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}([X=k]\cap[Y=k])$ qui est une réunion d'événements incompatibles.
Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=Y]) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}([X=k])\,\mathbb{P}([Y=k]] \\
&= \mathrm{e}^{-6}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{3^{2k}}{k!k!}
\end{aligned}$$