Exercice| [4356] | 1| Étude d'un système à deux états

Un feu bicolore, lorsqu'il est « rouge » à l'instant n, passe au « vert » à l'instant $n+1$ avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$ et lorsqu'il est « vert » à l'instant n, il passe au « rouge » à l'instant $n+1$ avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$.
On suppose que cette expérience aléatoire peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \mathbb{P}(R_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ où R_n (respectivement V_n) est l'événement : « le feu est rouge (respectivement vert) à l'instant n ».

(1). Établir les relations de récurrence liant r_{n+1} et v_{n+1} à r_n et v_n.
Déterminer alors une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(2). Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

(3). Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = \mathrm{I}_2 \\ B - \dfrac{1}{6}C = A \end{cases}$ où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculer alors B^2, C^2, BC et CB.

(4). En déduire A^n, puis les expressions de r_n et v_n en fonction de n.

(5). Quelles sont les limites éventuelles de r_n et v_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Pistes de réflexion

(1). On utilisera le système complet d'événements $\{R_n, V_n\}$ pour déterminer $\mathbb{P}([R_{n+1}])$ et $\mathbb{P}([V_{n+1}])$.

(2). On remarque que l'on a une formule proche de celle que l'on obtient pour l'expression du terme général d'une suite géométrique. Une récurrence permettra de l'établir.

(3). On résout ce système linéaire dont les inconnues sont les matrices B et C, puis on calcule les produits demandés.

(4). On utilisera le binôme de Newton pour calculer A^n à partir de sa décomposition en fonction de B et C.

(5). On exploite l'expression de A^n pour obtenir les expressions de r_n et v_n en fonction de n.

(6). C'est un calcul de limite qui fait intervenir des suites géométriques.

Éléments de correction

(1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\overline{R_n} = V_n$, les deux événements $\{V_n, R_n\}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Ainsi d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{n+1}) &= \mathbb{P}(R_n) \times \mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1}) + \mathbb{P}(V_n) \times \mathbb{P}_{V_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{3} + v_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où $r_{n+1} = \dfrac{1}{3} r_n + \dfrac{1}{2} v_n$.

De même, on a : $$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_{n+1}) &= \mathbb{P}(R_n) \times \mathbb{P}_{R_n}(V_{n+1}) + \mathbb{P}(V_n) \times \mathbb{P}_{V_n}(V_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{2}{3} + v_n \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où $v_{n+1} = \dfrac{2}{3} r_n + \dfrac{1}{2} v_n$.

On en déduit alors qu'en posant $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on a bien $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(2). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Initialisation : il est immédiat que : $$\begin{aligned} A^0 \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} &= \mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après la question précédente, on a : $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Or par hypothèse de récurrence, on a : $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Par suite, on en déduit que : $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= A \times A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= A^{n+1} \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, on en déduit que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n, c'est à dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

(3). On désigne par $\mathcal{S}$ le système linéaire d'inconnue les deux matrices B et C suivant :
$\mathcal{S} : \begin{cases} B + C = \mathrm{I}_2 \\ B - \dfrac{1}{6}C = A \end{cases}$
On résout $\mathcal{S}$ par échelonnement :

$$\begin{cases} B + C = \mathrm{I}_2 \\ B - \dfrac{1}{6}C = A \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B + C = \mathrm{I}_2 \\ -\dfrac{7}{6}C = A - \mathrm{I}_2 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{6}{7}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B = \dfrac{1}{7}\mathrm{I}_2 + \dfrac{6}{7}A \\ -\dfrac{7}{6}C = A - \mathrm{I}_2 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{6}{7}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B = \dfrac{1}{7}\mathrm{I}_2 + \dfrac{6}{7}A \\ C = \dfrac{6}{7}\mathrm{I}_2 - \dfrac{6}{7}A \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que :
$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{7}\mathrm{I}_2 + \frac{6}{7}A \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, on trouve que :
$$\begin{aligned} C &= \frac{6}{7}\mathrm{I}_2 - \frac{6}{7}A \\ &= \frac{6}{7}\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} - \frac{6}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus, on a :
$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

et :
$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= C \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et :
$$\begin{aligned} CB &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4). Puisque :
$$\begin{aligned} B \times \left(\frac{1}{6}C\right) &= \frac{1}{6}(B \times C) \\ &= \frac{1}{6}(C \times B) \\ &= \left(\frac{1}{6}C\right) \times B \end{aligned}$$

on peut appliquer le binôme de Newton pour calculer A^n à la décomposition $A = B - \frac{1}{6}C$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} A^n &= \left(B - \frac{1}{6}C\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \left(-\frac{1}{6}C\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{6^{n-k}} B^k C^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}\frac{(-1)^n}{6^n}B^0 C^n + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{6^{n-k}} B^k C^{n-k}\right)}_{=0 \text{ car } B\times C=(0)} + \binom{n}{n}\frac{1}{6^{n-n}}B^n C^{n-n} \\ &= \frac{(-1)^n}{6^n}C^n + B^n \\ &= B + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

On en déduit donc que :
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \left(B + \left(-\frac{1}{6}\right)^n C\right)\begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{4}{7} & \frac{3}{7} - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{4}{7} & \frac{4}{7} + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) r_0 + \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) r_0 \\ \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) r_0 + \left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il vient donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) r_0 + \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) r_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) r_0 + \left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) v_0$$

(5). Puisque $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$, on en déduit que $\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par suite, on en déduit que :

$$r_n = \underbrace{\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{7}} r_0 + \underbrace{\left(\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{7}} r_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{7}r_0 + \frac{3}{7}v_0$$

et de même que :

$$v_n = \underbrace{\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{7}} r_0 + \underbrace{\left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{7}} v_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{7}r_0 + \frac{4}{7}v_0$$