Exercice| [0435] | 1| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application φ donnée par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \left(P(0)+P(1), \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{array} \right.$$

(1). Montrer que φ est une application linéaire.

(2). Donner la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer le rang de φ. Qu'en déduire pour φ ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que φ est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par φ est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, puis on en déterminera les images par φ pour construire la matrice de φ dans les bases canoniques de ces deux espaces.

(3). On cherchera le rang de φ en cherchant celui de sa matrice par échelonnement en ligne de la matrice, car théorème, ce dernier est égal au rang de φ. Le caractère bijectif de φ proviendra de la comparaison du rang de φ à la dimension de $\mathbb{R}_2[x]$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} \varphi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{est linéaire} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{ccc} \forall P_1 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \forall P_2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right., \varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda \varphi(P_1) + \varphi(P_2)\right)$$

Soient alors $\left\{\begin{array}{rcl} P_1 : x \longmapsto c_1 + b_1 x + a_1 x^2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ P_2 : x \longmapsto c_2 + b_2 x + a_2 x^2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$.

On pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

Montrons que $\varphi(P_3) = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.

Par définition de φ, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(P_3) &= \left(P_3(0)+P_3(1), \int_0^1 P_3(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 tP_3(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left((\lambda P_1+P_2)(0) + (\lambda P_1+P_2)(1), \int_0^1 (\lambda P_1+P_2)(t)\,\mathrm{d}t, \right. \\
&\qquad \left. \int_0^1 t(\lambda P_1+P_2)(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\lambda P_1(0)+P_2(0)+\lambda P_1(1)+P_2(1), \int_0^1 (\lambda P_1(t)+P_2(t))\,\mathrm{d}t, \right. \\
&\qquad \left. \int_0^1 t(\lambda P_1(t)+P_2(t))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\lambda P_1(0)+\lambda P_1(1)+P_2(0)+P_2(1), \lambda\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t, \right. \\
&\qquad \left. \int_0^1 (\lambda t P_1(t)+tP_2(t))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\lambda P_1(0)+\lambda P_1(1)+P_2(0)+P_2(1), \lambda\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t, \right. \\
&\qquad \left. \lambda\int_0^1 \lambda t P_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tP_2(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\lambda P_1(0)+\lambda P_1(1), \lambda\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t, \lambda\int_0^1 \lambda t P_1(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&\qquad + \underbrace{\left(P_2(0)+P_2(1), \int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 tP_2(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\varphi(P_2)} \\
&= \lambda\underbrace{\left(P_1(0)+P_1(1), \int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 tP_1(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\varphi(P_1)} + \varphi(P_2) \\
&= \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)
\end{aligned}$$

Par conséquent $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire.

(2). En notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ où $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$ et $P_2 : x \longmapsto x^2$ un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\varphi(P_0) &= \left(1+1, \int_0^1 1\,\mathrm{d}t, \int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(2, [t]_0^1, \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right) \\
&= \left(2, 1-0, \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \\
&= \left(2, 1, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1) &= \left(0+1, \int_0^1 t\,\mathrm{d}t, \int_0^1 t \times t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(1, \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1, \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right) \\
&= \left(1, \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}, \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \\
&= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(P_2) &= \left(0^2+1^2, \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t, \int_0^1 t \times t^2 \,\mathrm{d}t\right)\\
&= \left(1, \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1, \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1\right)\\
&= \left(1, \frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}, \frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)\\
&= \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

et par suite, la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(3). On obtient le rang de la matrice A par un échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(A) = 3$, et par suite que $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ puisque par théorème le rang de φ est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.
Ainsi, φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}^3$ de rang 3. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes, φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}^3$.