Exercice| [4303] | 1| Intégrales généralisées

Soit $I = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t - 2}\,\mathrm{d}t$.

(1). Quelle est la nature de l'intégrale I ?

(2). Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall x \in \,]2; +\infty[\,, \quad \dfrac{1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$.

(3). En déduire la valeur de I.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier les bornes impropres de I, et on pourra ensuite utiliser le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives.

(2). On procèdera à une réduction au même dénominateur pour identifier les deux coefficients a et b.

(3). On utilisera la relation de Chasles à partir de la décomposition obtenue à la question précédente, en revenant à la définition de la valeur d'une intégrale impropre.

Éléments de correction

(1). La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2 - t^2}$ est continue sur $[3; +\infty[$. Par suite, seule la borne $+\infty$ de I est impropre.

On a par ailleurs : $\begin{cases} \dfrac{1}{t^2 - t - 2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \\ \forall t \in [3; +\infty[\,, \dfrac{1}{t^2} \geq 2 \end{cases}$

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, les intégrales $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t - 2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Comme $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que I est une intégrale convergente.

(2). On a : $\quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \,]2; +\infty[\,, \ \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2} = \dfrac{a(x-2) + b(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{(a+b)x - 2a + b}{(x^2 - x - 2)}$

Ainsi :

$$\left(\forall x \in \,]2; +\infty[\,, \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{(a+b)x - 2a + b}{x^2 - x - 2} \right) \underset{\substack{\textbf{Unicité des coefficients} \\ \textbf{d'un polynôme}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$$

Par conséquent $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$ que l'on résout par échelonnement en lignes :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Ainsi, on en déduit que $a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Finalement : $\quad \forall x \in \,]2; +\infty[\,, \ \dfrac{1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{1}{3(x-2)} - \dfrac{1}{3(x+1)}$.

(3). Soit $A \geq 3$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_3^A \frac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x &= \int_A^3 \left(\frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{3(x+1)} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \int_3^A \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} \int_3^A \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{\forall x \in [3;A[,\ x-2>0 \\ \textbf{et } x+1>0}}{=} \frac{1}{3} [\ln(x-2)]_3^A - \frac{1}{3} [\ln(x+1)]_3^A \\
&= \frac{1}{3} (\ln(A-2) - \ln(3-1)) \\
&\quad - \frac{1}{3} (\ln(A+1) - \ln(3+1)) \\
&= \frac{1}{3} \ln(A-2) - \frac{1}{3} \ln(A+1) + \frac{1}{3} \ln(4) \\
&= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{A-2}{A+1} \right) + \frac{2}{3} \ln(2)
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{A-2}{A+1} \underset{A \to +\infty}{\sim} \dfrac{A}{A} = 1$, on en déduit que $\dfrac{A-2}{A+1} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par composition des limites que $\ln \left(\dfrac{A-2}{A+1} \right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_3^A \frac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} \ln(2)$.

Finalement, on en déduit que $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \ln(2)$.