Exercice| [4300] | 1| Intégrales généralisées

(1). Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^n}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

(2). Calculer J_1.

(3). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad J_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} J_n$.

(4). Déduire des questions précédentes la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier les bornes impropres en étudiant le domaine de continuité de la fonction à intégrer, puis on mobiliser le théorème d'équivalence des intégrales impropres de fonctions positives.

(2). On pourra montrer que $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$ et remarquer que $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{6}\dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2-x+1}$

Éléments de correction

(1). La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^3+1)^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Il est immédiat que :

— $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3n}}$

— $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) \geq 0$

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente si, et seulement si, $3n > 1$, c'est à dire $n > \dfrac{1}{3}$

ainsi, d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si, et seulement si, $n > \dfrac{1}{3}$.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ étant de même nature, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si, et seulement si, $n > \dfrac{1}{3}$.

(2). Par définition, $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

On a : $\forall x \geq 0,$
$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\end{aligned}$$

Soit alors $A \geq 0$.

On a donc :
$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^A\\ &= \left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^A\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{A+1}{\sqrt{A^2-A+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right)\\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{A+1}{\sqrt{A^2-A+1}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{\sqrt{A^2}} = 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on en déduit par composition que $\ln\left(\dfrac{A+1}{\sqrt{A^2-A+1}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

Par ailleurs, on a $\dfrac{2A-1}{\sqrt{3}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition $\arctan\left(\dfrac{2A-1}{\sqrt{3}}\right) \underset{\to A}{\longrightarrow} +\infty, \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, on en déduit que $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

(3). On remarque que $\dfrac{x}{(x^3+1)^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{x}{(x^3+1)^n} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres, les deux intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, et donc convergentes d'après ce qui précède.

On a de plus : $J_n = 0 + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, on remarque que :
$$\begin{aligned}J_n - J_{n+1} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(x^3+1)^n} - \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^3+1}{(x^3+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{n+1} \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi, il vient que : $J_n = 3n\left(J_n - J_{n+1}\right)$

ce qui permet bien d'obtenir que $J_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} J_n$.

(4). De la relation précédente, on tire que $J_n = \dfrac{3n-4}{3n-3} \times \dfrac{3n-7}{3n-6} \times \ldots \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.