Exercice| [0428] | 1| Espaces vectoriels

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,,\ x+y-z+t=0 \text{ et } x-3y-2z=0\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de F.

Pistes de réflexion

(1). On montrera que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ en mobilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels par stabilité par combinaison linéaire.

(2). Il s'agira d'exploiter la caractérisation des élémens de F en la traduisant sous forme d'un système de conditions qui permettra de voir les $4-$uplets d'éléments de F comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui devront appartenir à F.

Éléments de correction

(1). **F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:** c'est effectivement le cas par définition de F.

$\overrightarrow{0} = (0,0,0,0)$ **appartient à F :** en effet il est immédiat que $0+0-0+0=0$ et $0-3\times 0-2\times 0=0$, ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in F$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $u = (x,y,z,t) \in F$, $v = (x',y',z',t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $w = \lambda u + v$ avec $w = (x'',y'',z'',t'')$.

Montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x''+y''-z''+t''=0$ et $x''-3y''-2z''=0$.

Par définition de w, on a les relations : $\begin{cases} x'' = \lambda x + x' \\ y'' = \lambda y + y' \\ z'' = \lambda z + z' \\ t'' = \lambda t + t' \end{cases}$.

On a alors :
$$\begin{aligned} x''+y''-z''+t'' &= (\lambda x + x') + (\lambda y + y') - (\lambda z + z') + (\lambda t + t') \\ &= \lambda \underbrace{(x+y-z+t)}_{=0 \text{ car } u\in F} + \underbrace{x'+y'-z'+t'}_{=0 \text{ car } v\in F} \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

mais aussi :
$$\begin{aligned} x''-3y''-2z'' &= (\lambda x + x') - 3(\lambda y + y') - 2(\lambda z + z') \\ &= \lambda \underbrace{(x-3y-2z)}_{=0 \text{ car } u\in F} + \underbrace{x'-3y'-2z'}_{=0 \text{ car } v\in F} \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent, on en déduit que $w \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Par définition de F, on a :

$$\begin{aligned}
((x,y,z,t) \in F) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+\ \ y-\ \ z+t=0 \\ x-3y-2z \qquad =0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+\ \ y-z+t=0 \\ \quad -4y-z-t=0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-\ \ z+\ \ t=0 \\ \quad y+\dfrac{1}{4}z+\dfrac{1}{4}t=0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \quad -\dfrac{5}{4}z+\dfrac{3}{4}t=0 \\ \quad y+\dfrac{1}{4}z+\dfrac{1}{4}t=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4}z-\dfrac{3}{4}t \\ y = -\dfrac{1}{4}z-\dfrac{1}{4}t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4}z-\dfrac{3}{4}t \\ y = -\dfrac{1}{4}z-\dfrac{1}{4}t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4}z-\dfrac{3}{4}t \\ y = -\dfrac{1}{4}z-\dfrac{1}{4}t \\ z = z+0t \\ t = 0z+t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left((x,y,z,t) = z\left(\frac{5}{4},\frac{-1}{4},1,0\right) + t\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},0,1\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \left((x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{5}{4},\frac{-1}{4},1,0\right),\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},0,1\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Par suite $F = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{5}{4},\frac{-1}{4},1,0\right),\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},0,1\right)\right)$ ce qui nous donne une famille génératrice.