Exercice| [4260] | 1| Loi conditionnelle

On dispose d'une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches toutes indiscernables au toucher. On lance un dé parfaitement équilibré à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On désigne par X la variable aléatoire égale au résultat du lancer du dé. On prélève alors simultanément X boules dans l'urne et on note Y le nombre de boules rouges obtenues.
Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) puis la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 2]$.

Pistes de réflexion

(1). On commence par déterminer les supports de X et Y, puis on remarque que X conditionne la loi de Y pour les calculs de $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

(2). (a). On utilise alors le système complet d'événements associé à X pour donner la loi de Y.

(b). On en revient à la définition d'une probabilité conditionnelle pour exprimer $\mathbb{P}_{[Y=2]}([X = i])$.

Éléments de correction

(1). Il est immédiat que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ que X suit la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $[\![1; 4]\!]$, c'est à dire que : $\quad \forall i \in [\![1; 4]\!], \quad \mathbb{P}([X = i]) = \dfrac{1}{4}$.
On a par ailleurs que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. En effet, l'événement $[Y = 0]$ pouvant se réaliser lors de tous les tirages de moins de 2 boules dans l'urne, l'événement $[Y = 2]$ pouvant lui se réaliser de façon certaine dès lors que l'on tire au moins 3 boules de l'urne, et pour finir l'événement $[Y = 1]$ pouvant se produire par exemple lors d'un tirage de deux boules de l'urne.
Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) revient donc à déterminer les probabilités $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$ où $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) &= \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 0]) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{0} \times \binom{2}{1}}{\binom{4}{1}} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1 \times 2}{4} \\
&= \frac{2}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) &= \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{1} \times \binom{2}{0}}{\binom{4}{1}} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{2 \times 1}{4} \\
&= \frac{2}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) &= \mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 2]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) &= \mathbb{P}([X = 2]) \times \mathbb{P}_{[X=2]}([Y = 0]) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{\binom{2}{0} \times \binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1 \times 1}{6} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) &= \mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}_{[X=2]}([Y=1])\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{2\times 2}{6}\\
&= \frac{4}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2]) &= \mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}_{[X=2]}([Y=2])\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{2}\times\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{2\times 1}{6}\\
&= \frac{2}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=0]) &= \mathbb{P}([X=3])\times\mathbb{P}_{[X=3]}([Y=0])\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1]) &= \mathbb{P}([X=3])\times\mathbb{P}_{[X=3]}([Y=1])\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{2\times 1}{4}\\
&= \frac{2}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=2]) &= \mathbb{P}([X=3])\times\mathbb{P}_{[X=3]}([Y=2])\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{2}\times\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1\times 2}{4}\\
&= \frac{2}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=0]) &= \mathbb{P}([X=4])\times\mathbb{P}_{[X=4]}([Y=0])\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=1]) &= \mathbb{P}([X=4])\times\mathbb{P}_{[X=4]}([Y=1])\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=2]) &= \mathbb{P}([X=4])\times\mathbb{P}_{[X=4]}([Y=2])\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{\binom{2}{2}\times\binom{2}{2}}{\binom{4}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1\times 1}{1}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D'où si l'on récapitule l'ensemble de ces résultats dans un tableau de loi conjointe :

X \ Y	0	1	2
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
2	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{1}{24}$
3	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
4	0	0	$\frac{1}{4}$

(2). (a). Les événements $\{[X=1],[X=2],[X=3],[X=4]\}$ forment un système complet d'événements. La loi de Y est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=0]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0])\\
&\quad +\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=0])\\
&= \frac{2}{16}+\frac{2}{24}+0+0\\
&= \frac{8}{48}\\
\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])\\
&\quad +\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=1])\\
&= \frac{2}{16}+\frac{4}{24}+\frac{2}{16}+0\\
&= \frac{20}{48}\\
\mathbb{P}([Y=2]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2])\\
&\quad +\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=1])\\
&= 0+\frac{1}{24}+\frac{2}{16}+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau de loi pour Y :

j	0	1	2
$\mathbb{P}([Y=j])$	$\frac{8}{48}$	$\frac{20}{48}$	$\frac{20}{48}$

(b). Il s'agit donc de déterminer les probabilités des événements $\mathbb{P}_{[Y=2]}([X=i])$ où $i\in\{1,2,3,4\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y=2]}([X=1]) &= \frac{\mathbb{P}([Y=2]\cap[X=1])}{\mathbb{P}([Y=2])}\\
&= 0\\
\mathbb{P}_{[Y=2]}([X=2]) &= \frac{\mathbb{P}([Y=2]\cap[X=2])}{\mathbb{P}([Y=2])}\\
&= \frac{\frac{1}{24}}{\frac{20}{48}}\\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y=2]}([X=3]) &= \frac{\mathbb{P}([Y=2]\cap[X=4])}{\mathbb{P}([Y=2])} \\
&= \frac{\frac{2}{16}}{\frac{20}{48}} \\
&= \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y=2]}([X=4]) &= \frac{\mathbb{P}([Y=2]\cap[X=4])}{\mathbb{P}([Y=2])} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{20}{48}} \\
&= \frac{6}{10}
\end{aligned}$$

et si l'on récapitule ces résultats dans un tableau de loi pour X sachant $[Y=2]$:

i	1	2	3	4
$\mathbb{P}_{[Y=2]}([X=i])$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$