Exercice| [4259] | 1| Déterminer la loi d'un couple

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues.
On extrait simultanément 3 boules de l'urne.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors d'un prélèvement et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues lors d'un prélèvement.

(1). Déterminer la loi du couple (X, Y).

(2). Déterminer les lois marginales de X et Y.

Pistes de réflexion

(1). On remarque que certains événements $[X = i] \cap [Y = j]$ sont des événements impossibles. . .et pour les autres, il s'agit de compter des prélèvements de i éléments parmi 2, de j éléments parmi 3 et de $3 - i - j$ éléments parmi 4.

(2). On utilise les systèmes complets d'événements liés à chacune des variables aléatoires pour déterminer la loi marginale de l'autre.

Éléments de correction

(1). On peut supposer que tous les prélèvéments simultanés de 3 boules dans cette urne sont équiprobables et il y a au total $\binom{9}{3}$ façon de prélever simultanément 3 boules dans une urne contenant 9 boules.
Le protocole de prélèvement donne que $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
Déterminer la loi du couple (X, Y) consiste à déterminer toutes les probabilités $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$ où $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Or puisque l'on prélève seulement trois boules, on a nécessairement $i + j \leq 3$.

Par conséquent : $\begin{cases} \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 2]) = 0 \\ \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 3]) = 0 \\ \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 3]) = 0 \end{cases}$

Soit alors $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $i + j \leq 3$.
L'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ consiste donc à prélever i boules blanches parmi les 2 boules blanches de l'urne, j boules rouges parmi les 3 boules rouges de l'urne et $3 - i - j$ boules bleus parmi les boules bleues de l'urne. Il y a donc $\binom{2}{i} \times \binom{3}{j} \times \binom{4}{3-i-j}$ façon de le faire.

Ainsi, on en déduit que : $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{\binom{2}{i} \times \binom{3}{j} \times \binom{4}{3-i-j}}{\binom{9}{3}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) &= \frac{\binom{2}{0} \times \binom{3}{0} \times \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{1 \times 1 \times 4}{84} \\ &= \frac{4}{84} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) &= \frac{\binom{2}{0} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{1 \times 3 \times 6}{84} \\ &= \frac{18}{84} \\ &= \frac{3}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 2]) &= \frac{\binom{2}{0} \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{1 \times 3 \times 4}{84} \\ &= \frac{12}{84} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 3]) &= \frac{\binom{2}{0} \times \binom{3}{3} \times \binom{4}{0}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{1 \times 1 \times 1}{84} \\ &= \frac{1}{84} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) &= \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{0} \times \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{2 \times 1 \times 6}{84} \\ &= \frac{12}{84} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) &= \frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}\\
&= \frac{2\times 3\times 4}{84}\\
&= \frac{24}{84}\\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) &= \frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{2}\times\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}}\\
&= \frac{2\times 3\times 1}{84}\\
&= \frac{6}{84}\\
&= \frac{1}{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0]) &= \frac{\binom{2}{2}\times\binom{3}{0}\times\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}\\
&= \frac{1\times 1\times 4}{84}\\
&= \frac{4}{84}\\
&= \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) &= \frac{\binom{2}{2}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}}\\
&= \frac{1\times 3\times 1}{84}\\
&= \frac{3}{84}\\
&= \frac{1}{28}
\end{aligned}$$

On récapitule alors ces résultats dans le tableau de loi conjointe ci-dessous :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0

(2). Loi marginale de X : les événements $\{[Y=0],[Y=1],[Y=2]\}$, formant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=0]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=2])\\
&= \frac{1}{21}+\frac{3}{14}\frac{1}{7}+\frac{1}{84}\\
&= \frac{5}{12}\\
\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2])\\
&= \frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{14}+0\\
&= \frac{1}{2}\\
\mathbb{P}([X=2]) &= \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2])\\
&= \frac{1}{21}+\frac{1}{28}+0+0\\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Loi marginale de Y : les événements $\{[X=0],[X=1],[X=2]\}$ formant une système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=0]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0])\\
&= \frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}\\
&= \frac{5}{21}\\
\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])\\
&= \frac{3}{14}+\frac{2}{7}+\frac{1}{28}\\
&= \frac{15}{28}\\
\mathbb{P}([Y=2]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=2])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2])\\
&= \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+0\\
&= \frac{3}{14}\\
\mathbb{P}([Y=3]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=3])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=3])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=3])\\
&= \frac{1}{84}+0+0\\
&= \frac{1}{84}
\end{aligned}$$

Ce qui donne en résumé :

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$\mathbb{P}([X$
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$	
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0	
2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	0	0	
$\mathbb{P}([Y=j])$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$	