Exercice| [4243] | 1| Étude de la convergence d'intégrales impropres

Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont convergentes ?

(1). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

(2). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

(3). $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$

(4). $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,\mathrm{d}t$

(5). $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

(6). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

(7). $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(2+\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

(8). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}+t}{t^3}\,\mathrm{d}t$

Pistes de réflexion

Pour chacune des intégrales impropres proposées, on commencera par identifier les bornes impropres en identifiant notamment le domaine de continuité de la fonction à intégrer, avant de :

— soit mobiliser le théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives

— soit mobiliser le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives

— soit de remarquer éventuellement que la fonction considérée est prolongeable par continuité en la borne impropre finie.

Éléments de correction

(1). La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^4+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Il est immédiat que :

— $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$

— $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ f(x) \geq 0$

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ étant de même nature, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

(2). La fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Il est immédiat que :

— $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{x}{x^3}} = \dfrac{1}{x}$

— $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ f(x) \geq 0$

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann divergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ étant de même nature, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.

(3). La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2-t}$ est continue sur $]1;2]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa borne 1.

Il est immédiat que :

— $f(t) \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$

— $\forall t \in\,]1;2]\,,\ f(t) \geq 0$

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t-1}$ est continue sur $]1;2]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{2} g(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa borne 1.

Soit $A \in\,]1;2]$. On a :

$$\begin{aligned}\int_A^2 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_A^2 \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\\ &= [\ln(t-1)]_A^2\\ &= \ln(2-1)-\ln(A-1)\\ &= -\ln(A-1)\\ &\underset{A\to1}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

par suite $\displaystyle\int_A^{2} g(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to1}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\displaystyle\int_1^{2} g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, et par conséquent $\displaystyle\int_1^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

(4). La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}$ est continue sur $]0;1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa borne 0.

Il est immédiat que :

— $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

— $\forall t \in\,]0;1]\,,\ f(t) \geq 0$

— $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(5). La fonction $f : x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)$ est continue sur $[2;\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Il est immédiat que :

— $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$

— $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ f(x) \geq 0$

— $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

(6). La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1+\ln(x)}{x+1}$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc l'inégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en ses deux bornes 0 et $+\infty$.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$: Il est immédiat que :

— $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$
— $\forall x \in]0;1]\,,\ f(x) \geq 0$
— $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de référence convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$: Il est immédiat que :

— $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$
— $\forall x \in [1;+\infty[\,,\ f(x) \geq 0$

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Soit $A \geq 1$. On a :
$$\begin{aligned}
\int_1^A g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^A \\
&= \frac{1}{2}(\ln(A))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 \\
&= \frac{1}{2}(\ln(A))^2 \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

Par suite $\displaystyle\int_1^A g(x)\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, et il en est ainsi de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.

(7). La fonction $f : x \longmapsto \ln\left(2+\dfrac{2}{x^3}\right)$ est continue sur $[2;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Il est immédiat que :

— Pour tout $x \in [2;+\infty[\,,\ 2+\dfrac{2}{x^3} \geq 2$,
donc par croissance de la fonction logarithme sur $[2;+\infty[$: $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ f(x) \geq \ln(2)$.
— $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ f(x) \geq 0$
— $\displaystyle\int_2^{+\infty} 2\,\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente

donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.

(8). La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}+t}{t^3}$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa borne $+\infty$.

Il est immédiat que :

— $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^3} = \dfrac{1}{t^2}$
— $\forall t \in [1;+\infty[\,,\ f(t) \geq 0$
— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.