Exercice| [0418] | 1| Application linéaire de matrices

Dans tout ce qui suite, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère alors $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array} \right.$.

(1). Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). T est-il un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que l'image par T d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à la combinaison linéaire des images par T de ces éléments.

(2). On se souviendra que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$. Il restera alors à calculer les images de ces matrices élémentaires par T et les exprimer sur cette même base.

(3). On utilisera le théorème de caractérisation des automorphismes par l'inversibilité de leur représentation matricielle.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \text{est linéaire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall M & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall N & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. , f(\lambda N + N) = \lambda f(N) + f(N) \right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{ccc} M & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ N & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$.

On pose $R = \lambda M + N$

Par définition de f, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} T(R) & = & RA - AR \\ & = & (\lambda M + N) \times A - A \times (\lambda M + N) \\ & = & \lambda MA + NA - \lambda AM - AN \\ & = & \lambda \underbrace{(MA - AM)}_{=f(M)} + \underbrace{NA - AN}_{=f(N)} \\ & = & \lambda T(M) + T(N) \end{array}$$

et ainsi T est une application linéaire.

Ainsi, T est une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). On désigne par $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T(E_{11}), T(E_{21}), T(E_{12}), T(E_{22}))$.

Calcul de $T(E_{11})$ **on a :**

$$\begin{array}{rcl} T(E_{11}) & = & E_{11}A - AE_{11} \\ & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de $T(E_{12})$ **on a :**

$$\begin{array}{rcl} T(E_{12}) & = & E_{12}A - AE_{12} \\ & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \\ & = & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de $T(E_{21})$ **on a :**

$$\begin{array}{rcl} T(E_{21}) & = & E_{21}A - AE_{21} \\ & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}} \\ & = & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcul de $T(E_{22})$ **on a :**

$$\begin{array}{rcl} T(E_{22}) & = & E_{22}A - AE_{22} \\ & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, il vient : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(3). D'après le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs, puisque $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$: on a :

$$(T \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) \text{ est bijectif}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}))$$

Or : $\quad (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)) = 4)$.

Un échelonnement en lignes donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ est de rang 2, et par suite l'endomorphisme T n'est pas bijectif, et ce n'est donc pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.