Exercice| [3983] | 1| Calcul par primitivation directe

Montrer que l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Pistes de réflexion

- On commencera par identifier les bornes impropres de $\mathcal{I}$.
- Puis on transformera l'expression de la fonction à intégrer de sorte à pouvoir la primiviter directement, en multipliant au numérateur et au dénominateur par e^{x}.
- Il restera alors à étudier la convergence de l'intégrale à l'aide d'un calcul de limite.

Éléments de correction

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}$ est continue sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc l'intégrale $\mathcal{I}$ est impropre en ses deux bornes 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t$: Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

On a directement que :

$$\begin{aligned}
\int_x^{\frac{\pi}{4}} &= \int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\sqrt{\sin(2t)}\right]_x^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{\sin(2x)} \\
&= 1 - \sqrt{\sin(2x)}
\end{aligned}$$

Comme $\sin(2x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par composition $\sqrt{\sin(2x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et par suite on a :

$$\int_x^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et sa valeur est $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Convergence de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$: Soit $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a directement que :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\sqrt{\sin(2t)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{x} \\
&= \sqrt{\sin(2x)} - \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\sin(2x)} - 1
\end{aligned}$$

Comme $\sin(2x) \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$, par composition $\sqrt{\sin(2x)} \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$ et par suite on a :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et sa valeur est $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

Convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ puisque $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, par définition $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et sa valeur est alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + (-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$