Exercice| [3982] | 1| Calcul par primitivation directe

Montrer que l'intégrale
$$\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^{\,x}+1)\,(1+\mathrm{e}^{\,-x})}\,\mathrm{d}x$$
converge et calculer sa valeur.

Pistes de réflexion

- On commencera par identifier les bornes impropres de $\mathcal{I}$.
- Puis on transformera l'expression de la fonction à intégrer de sorte à pouvoir la primiviter directement, en multipliant au numérateur et au dénominateur par $\mathrm{e}^{\,x}$.
- Il restera alors à étudier la convergence de l'intégrale à l'aide d'un calcul de limite.

Éléments de correction

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{\,t}+1)\,(\mathrm{e}^{\,-t}+1)}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\mathcal{I}$ est seulement impropre en sa borne $+\infty$.
Soit alors $x \in [0;+\infty[$.
On a :
$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{(\mathrm{e}^{\,t}+1)\,(\mathrm{e}^{\,-t}+1)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{(\mathrm{e}^{\,t}+1)\,(1+\mathrm{e}^{\,-t})\,\mathrm{e}^{\,-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{(\mathrm{e}^{\,t}+1)\,(\mathrm{e}^{\,t}+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{(\mathrm{e}^{\,t}+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\right]_0^x \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\,0}+1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1}
\end{aligned}$$
Puisque $\mathrm{e}^{\,x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne que :
$$\int_0^x \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{\,t})\,(1+\mathrm{e}^{\,-t})}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
ce qui assure que l'intégrale $\mathcal{I}$ est convergente et a pour valeur $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^{\,t}+1)\,(1+\mathrm{e}^{\,-t})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.