Exercice| [3976] | 1| Convergence et valeur par IPP

On se propose dans cet exercice d'établir la convergence et de déterminer la valeur de l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(1). À l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall X \geq 1, \quad \int_1^X \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{X}\ln\left(1+X^2\right) + \ln(2) + 2\arctan(X) - \frac{\pi}{2}$$

(2). En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\mathcal{I}$.

Pistes de réflexion

(1). On effectuera une intégration par parties en dérivant $t \longmapsto \ln\left(1+t^2\right)$.

(2). On commencera par identifier les bornes impropres, puis on utilisera la question précédente pour montrer que l'intégrale converge en revenant à la définition de ce qu'est une intégrale convergente.

Éléments de correction

(1). Soit $X \geq 1$. On effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = \ln\left(1+t^2\right) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v(t) = -\dfrac{1}{t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;X[$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2} &= \left[-\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}\right]_1^X - \int_1^X -\frac{1}{t}\times\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}\right]_1^X + 2\int_1^X \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}\right]_1^X + 2\left[\arctan(t)\right]_1^X \\ &= -\frac{1}{X}\ln\left(1+X^2\right) + \ln(2) + 2\arctan(X) - 2\arctan(1) \\ &= -\frac{1}{X}\ln\left(1+X^2\right) + \ln(2) + 2\arctan(X) - 2\times\frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{X}\ln\left(1+X^2\right) + \ln(2) + 2\arctan(X) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2). La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln\left(1+t^2\right)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc $\mathcal{I}$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Soit alors $X \geq 1$. D'après ce qui précède, on a :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{X}\ln\left(1+X^2\right) + \ln(2) + 2\arctan(X) - \frac{\pi}{2}$$

Dans un premier temps, on a que $2\arctan(X) - \dfrac{\pi}{2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 2\times\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}\ln\left(1+X^2\right) &= \frac{1}{X}\ln\left(X^2\left(1+\frac{1}{X^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{X}\left(2\ln(X) + \ln\left(1+\frac{1}{X^2}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{2\ln(X)}{X}}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{X^2}\right)}{X}}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Par suite, il vient que $\displaystyle\int_1^X f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \frac{\pi}{2} + \ln(2)$ et par suite, par définition l'intégrale $\mathcal{I}$ est convergente et on a $\mathcal{I} = \dfrac{\pi}{2} + \ln(2)$.