

Exercice [3926] | 1 | Composées de projecteurs

Soit E un espace vectoriel et $(p, q) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.
On suppose que p et $p \circ q$ sont des projecteurs.
Montrer alors que $p \circ q \circ p$ est un projecteur de E .

Pistes de réflexion

— On reviendra à la caractérisation des projecteurs, en essayer de montrer que
 $(p \circ q \circ p)(p \circ q \circ p) = p \circ q \circ p$.

Éléments de correction

On note $u = p \circ q \circ p$. Par théorème : $(u \in \mathcal{L}(E) \text{ est un projecteur}) \Leftrightarrow (u \circ u = u)$.

$$\begin{aligned} \text{Il vient alors que : } u \circ u &= p \circ q \circ \underbrace{p \circ p \circ q \circ p}_{=p} \\ &= \underbrace{p \circ q \circ p \circ q \circ p}_{=p \circ q} \\ &= p \circ q \circ p \\ &= u \end{aligned}$$

et donc u est un projecteur.