Exercice| [3925] | 1| Étude d'un projecteur

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Pistes de réflexion

- Un projecteur u est caractérisée par le fait que $u \circ u = \ldots$ ce qui matriciellement revient à vérifier que...
- On doit déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ sur lequel on projette et le sous-espace donnant la direction. Il faudra donc chercher les vecteurs invariants et d'image nulle pour identifier ces deux sous-espaces.

Éléments de correction

Pour tout la suite, on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On sait que : $(u$ est une symétrie vectorielle$) \quad \Leftrightarrow \quad (u \circ u = u)$
$\Leftrightarrow \quad (A^2 = A)$

Or un calcul rapide permet de voir que $A^2 = A$, donc u est bien un projecteur.

On note alors : $F_1 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, u\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right\}$ et $F_2 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right\}$.

u est alors le projecteur sur F_1 de direction F_2.

Recherche d'une base de F_1 : de part la définition de F_1, il vient que :

$$\left(\overrightarrow{x} \in F_1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)\right)$$

La représentation matricielle de $u - \mathrm{Id}_E$ est : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u - \mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Il est immédiat que :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,((1,0,0),(0,0,1))$

Recherche d'une base de F_2 : de part la définition de F_2, il vient que :

$$\left(\overrightarrow{x} \in F_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(u)\right)$$

Il est immédiat que :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$ ce qui donne $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$.

Finalement, f est le projecteur sur le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\,((1,0,0),(0,0,1))$ de direction la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,((1,1,1))$.