Exercice| [3899] | 1| Somme directe dans $\mathbb{R}_2[X]$

Soit $F_1 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

(1). Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Montrer que F_1 et $F_2 = \mathrm{Vect}\,(X)$ sont en somme directe.

Pistes de réflexion

(1). On vérifie en particulier que F_2 est stable par combinaison linéaire, en s'étant au préalable assuré que F_1 est bien un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). On considèrera deux décompositions d'un élément quelconque de $F_1 + F_2$ et on montrera que ces deux décompositions sont égales.

Éléments de correction

(1). **F_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$:** par définition de F_1, tout élément de F_1 est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ appartient à F_1 : le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul $\tilde{0}$.

On a clairement que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t \times 0.\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 0.\,\mathrm{d}t\\ &= 0\end{aligned}$$

et ainsi $\tilde{0} \in F_1$.

F_1 est stable par combinaison linéaire : soit $(P, Q) \in F_1 \times F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $R = \lambda P + Q$.

Montrons alors que $\int_0^1 tR(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 tR(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t\,(\lambda P + Q)\,(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t\,(\lambda P(t) + Q(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (\lambda tP(t) + tQ(t))\,\mathrm{d}t\\ &\underset{\text{Linéarité de l'intégrale}}{=} \lambda \underbrace{\int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t}_{t=0}\\ &\underset{\substack{P\in F_1\\ Q\in F_1}}{=} \lambda \times 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

et par suite $R \in F_1$, c'est à dire $\lambda P + Q \in F_1$.

(2). Soit $f \in F_1 + F_2$.

Supposons qu'il existe deux couples $(P_1, P_2) \in F_1 \times F_2$ et $(Q_1, Q_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $f = P_1 + P_2$ et $f = Q_1 + Q_2$.

Ainsi, on a $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$.

Puisque que P_2 et Q_2 sont deux éléments de F_2, il existe $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$, $P_2(X) = \alpha_2 X$ et $Q_2(X) = \beta_2 X$.

Puisque $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2$, on en déduit que :

$$XP_1(X) + XP_2(X) = XQ_1(X) + XQ_2(X)$$

On en déduit donc que : $\int_0^1 (tP_1(t) + tP_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (tQ_1(t) + tQ_2(t))\,\mathrm{d}t$

et par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\underbrace{\int_0^1 tP_1(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \int_0^1 tP_2(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 tQ_1(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \int_0^1 tQ_2(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne : $\int_0^1 tP_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tQ_2(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi : $\int_0^1 \alpha_2 t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \beta_2 t^2\,\mathrm{d}t$.

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que : $\alpha_2 \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \beta_2 \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$ et comme $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \neq 0$, on en déduit que $\alpha_2 = \beta_2$.

Par suite, il vient que $P_2 = Q_2$ et donc que $P_1 = Q_1$.