Exercice| [3895] | 1| Somme directe et application linéaire

On désigne par $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels et on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ sa base canonique.

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tel que : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(X) = X^2 \\ f(X^2) = X \\ f(X^3) = X^3 \end{cases}$

(1). Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$.

(2). Soient les sous-ensembles

$$S = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P\} \text{ et } A = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = -P\}.$$

(a). Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
En donner une base et préciser leur dimension.

(b). Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$ et donner la décomposition d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$ dans cette somme directe.

(3). Soit $E = \mathrm{Vect}\ (1 + X^3, X, X^2)$. Donner une base de $E \cap S$.

(4). (a). Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_3[X]$ qui vérifie $F \oplus (E \cap S) = S$.

(b). Quelle est la dimension de F ?

(c). Montrer que $E \cap F = \{\tilde{0}\}$ puis que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F$.

Pistes de réflexion

(1). C'est une simple conséquence de la définition de f et l'on pourra utiliser la représentation matricielle de f pour le montrer.

(2). (a). On pourra voir A et S comme des noyaux d'applications linéaires.

(b). On remarquera que f est une symétrie dont les éléments caractéristiques correspondent à cette somme directe.

(3). On cherchera les éléments communs à E et S en traduisant l'appartenance à chacun de ces sous-espaces.

(4). (a). S étant lui même un espace vectoriel, et $E \cap S$ en étant un sous-espace, le théorème d'existence des supplémentaires en dimension fini permet de conclure.

(b). C'est un résultat direct dès lors que l'on connaît la dimension d'au moins deux des trois espaces qui interviennent ici.

(c). Le caractère supplémentaire s'obtient à partir de la caractérisation des supplémentaires par la dimension, et on n'oubliera pas que F est un sous-ensemble de S...

Éléments de correction

(1). Par définition de f, la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par suite, un calcul direct donne que $A^2 = \mathrm{I}_4$ est ainsi $f \circ f = \mathrm{I}_{\mathbb{R}_3[X]}$.

(2). (a). On a directement que :
$$\begin{aligned} S &= \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})(P) = \tilde{0}\} \\ &= \mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) \end{aligned}$$

où il est clair que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ est une application linéaire.
$$\begin{aligned} A &= \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = -P\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})(P) = \tilde{0}\} \\ &= \mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) \end{aligned}$$
où il est clair que $f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ est une application linéaire.
Or on sait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel donc A et S sont deux sous-espaces vectoriels.
Par ailleurs, en notant $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} (P \in S) &\Leftrightarrow (f(P) = P) \\ &\Leftrightarrow (af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) = aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &\Leftrightarrow (aX^3 + bX + cX^2 + d = aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &\Leftrightarrow (b = c) \\ &\Leftrightarrow (P = aX^3 + bX^2 + bX + d) \\ &\Leftrightarrow (P \in \mathrm{Vect}\ (1, X + X^2, X^3)) \end{aligned}$$

La famille $(1, X + X^2, X^3)$ est clairement génératrice de S, et libre car échelonnée en degré, donc elle en forme une base et on en déduit que $\dim(S) = 3$.
De même :

$$\begin{aligned} (P \in A) &\Leftrightarrow (f(P) = -P) \\ &\Leftrightarrow (af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) = -aX^3 - bX^2 - cX - d) \\ &\Leftrightarrow (aX^3 + bX + cX^2 + d = -aX^3 - bX^2 - cX - d) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (P = bX^2 - bX) \\ &\Leftrightarrow (P \in \mathrm{Vect}\ (X - X^2)) \end{aligned}$$

et ainsi A est alors une droite vectorielle, donc de dimension 1.

(b). Puisque $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$, f est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$, c'est à dire f est la symétrie par rapport à S et parallèlement à A.
Puisque f est une symétrie possédant les caractéristiques précdentes, il vient que $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$.

Par ailleurs, on a : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ P = \dfrac{1}{2}\underbrace{(P - f(P))}_{=P_1} + \dfrac{1}{2}\underbrace{(P + f(P))}_{P_2}$.

où un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})(P_1) &= f(P_1) + P_1 \\ &= f(P - f(P)) + (P - f(P)) \\ &= f(P) - f^2(P) + P - f(P) \\ &= f(P) - P + P - f(P) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $P_1 \in \mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = A$.
De même, on a :
$$\begin{aligned} (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})(P_2) &= f(P_2) - P_2 \\ &= f(P + f(P)) - (P + f(P)) \\ &= f(P) + f^2(P) - P + f(P) \\ &= f(P) + P - P - f(P) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $P_2 \in \mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = S$.
On en déduit alors la décomposition de P sur $\mathbb{R}_3[X] = S \oplus A$.

(3). Soit $P \in E \cap S$. Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = \alpha\left(1+X^3\right) + \beta X + \gamma X^2$.

Il vient alors que :
$$\begin{aligned} f(P) &= \alpha\left(f(1) + f\left(X^3\right)\right) + \beta f(X) + \gamma\left(f\right) X^2, \\ &= \alpha\left(1+X^3\right) + \beta X^2 + \gamma X \end{aligned}$$

Or $P \in S$, donc $f(P) = P$, et on en déduit donc que : $\alpha\left(1+X^3\right) + \beta X + \gamma X^2 = \alpha\left(1+X^3\right) + \beta X^2 + \gamma X$

Par unicité de la décomposition du polynôme nul, on a $\beta = \gamma$.

Finalement, on en déduit que :
$$\begin{aligned} P &= \alpha\left(1+X^3\right) + \beta X + \beta X^2 \\ &= \alpha\left(1+X^3\right) + \beta\left(X+X^2\right) \end{aligned}$$

et donc que $P \in \mathrm{Vect}\left(1+X^3, X+X^2\right)$.

L'inclusion réciproque étant triviale, on en déduit que $E \cap S = \mathrm{Vect}\left(1+X^3, X+X^2\right)$.

(4). (a). $E \cap S$ est un sous-espace de S qui est un espace vectoriel de dimension finie car lui-même sous-espace d'un espace de dimension finie. Par conséquent, d'après le théorème d'existence des supplémentaires en dimension finie, il existe F sous-espace vectoriel de S, et donc de $\mathbb{R}_3[X]$, tel que $F \oplus (E \cap S) = S$.

(b). On a vu que $E \cap S = \mathrm{Vect}\left(1+X^3, X+X^2\right)$, cette famille étant clairement génératrice par construction et libre car formée par deux vecteurs non colinéaires. Ainsi, elle en forme une base, et il vient que $\dim E \cap S = 2$.

Par suite, on a : $\dim(F) + \underbrace{\dim(E \cap S)}_{=2} = \underbrace{\dim(S)}_{=3}$ et donc $\dim(F) = 1$.

(c). D'après ce qui précède $F \cap (E \cap S) = \{\tilde{0}\}$. Comme F est un sous-espace de S, c'est donc un sous-ensemble de S, et donc les seuls éléments qu'il peut avoir de commun avec E sont ceux de $E \cap S$. Donc $F \cap E = \{\tilde{0}\}$.

E et F sont donc tels que :
- $E \cap F = \{\tilde{0}\}$
- $\dim(E) + \dim(F) = \dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right)$

donc par théorème, E et F sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.