Exercice| [3745] | 1| Étude d'une symétrie vectorielle

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments caractéristiques.

Pistes de réflexion

- Une symétrie vectorielle f est caractérisée par le fait que $f \circ f = \ldots$ ce qui matriciellement revient à vérifier que...
- On doit déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ par rapport à qui ont fait la symétrie et le sous-espace donnant la direction. Il faudra donc chercher les vecteurs invariants et ceux transformés en leur opposé pour identifier ces deux sous-espaces.

Éléments de correction

Pour tout la suite, on note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On sait que : $(f \text{ est une symétrie vectorielle}) \Leftrightarrow (f \circ f = \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (A^2 = \mathrm{I}_3)$

Or un calcul rapide permet de voir que $A^2 = \mathrm{I}_3$, donc f est bien une symétrie vectorielle.

On note alors : $F_1 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right\}$ et $F_2 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ f\left(\overrightarrow{x}\right) = -\overrightarrow{x}\right\}$.

f est alors la symétrie vectorielle par rapport à F_1 de direction F_2.

Recherche d'une base de F_1 : de part la définition de F_1, il vient que : $\left(\overrightarrow{x} \in F_1\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)\right)$

La représentation matricielle de $f - \mathrm{Id}_E$ est : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Or on a : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $f - \mathrm{Id}_E$ est de rang 1 et $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 2.

En reprenant les opérations de cet échelonnement en colonne, on a $\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\overrightarrow{e_3} - 2\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ sont deux vecteurs non nuls non colinéaires, donc libres, de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ qui est de dimension 2, et ils en forment alors une base. Ainsi $F_1 = \mathrm{Vect}\,((-2,1,0),(-2,0,1))$.

Recherche d'une base de F_2 : de part la définition de F_2, il vient que : $\left(\overrightarrow{x} \in F_2\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)\right)$

La représentation matricielle de $f - \mathrm{Id}_E$ est : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Or on a : $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C3 + C_2}{\sim_C} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $f + \mathrm{Id}_E$ est de rang 2 et $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1.

En reprenant les opérations de cet échelonnement en colonne, on a $-2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ qui est donc un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$, et par suite en forme une base. Ainsi $F_2 = \mathrm{Vect}\,((-2,1,1))$.

Finalement, f est la symétrie vectorielle par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Vect}\,((-1,1,0),(-1,0,1))$ de direction la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,((-2,1,1))$.