

Exercice [3701] | 1 | Utiliser les identités remarquables

On note p la demi-somme de trois réels a , b et c : $p = \frac{a+b+c}{2}$

Simplifier au mieux l'expression : $(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2$

Pistes de réflexion

- On essaiera de retarder le remplacement de p par sa valeur, et mobilisera les bonnes identités remarquables pour simplifier ensuite au mieux l'expression.
- Mettre en facteur peut permettre aussi de simplifier les calculs à mener.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} & (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2 \\ = & p^2 - 2 \times p \times a + a^2 + p^2 - 2 \times p \times b + b^2 + p^2 - 2 \times p \times c + c^2 + p^2 \\ = & 4p^2 - 2pa - 2pb - 2pc + a^2 + b^2 + c^2 \\ = & 4 \times \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^2 - 2p(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 \\ = & 4 \times \frac{(a+b+c)^2}{2^2} - 2 \times \frac{a+b+c}{2} \times (a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 \\ = & 4 \times \frac{(a+b+c)^2}{4} - (a+b+c) \times (a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 \\ = & (a+b+c)^2 - (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ = & a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$