Exercice| [3699] | 1| Développements d'expressions algébriques

Démontrer que :

(1). $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 1 = (x-1)\left(1+x+x^2\right)$;

(2). $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 1 = (x-1)\left(1+x+x^2+x^3\right)$;

(3). $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^6 - 1 = (x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$;

Pistes de réflexion

— On développera les membres de droite, pour les réduire ensuite de sorte à obtenir le premier membre de l'égalité proposée.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)\left(1+x+x^2\right) &= x\times 1 + x\times x + x\times x^2 - 1\times 1 - 1\times x - 1\times x^2\\ &= x + x^2 + x^3 - 1 - x - x^2\\ &= x^3 - 1\end{aligned}$$

(2). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)\left(1+x+x^2+x^3\right) &= x\times 1 + x\times x + x\times x^2 + x\times x^3 - 1\times 1\\ &\qquad -1\times x - 1\times x^2 - 1\times x^3\\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 - 1 - x - x^2 - x^3\\ &= x^4 - 1\end{aligned}$$

(3). Un calcul direct donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\underbrace{(x+1)(x-1)}_{=x^2-1}\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right) &= \left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\\ &= \left(x^2\times x^2 + x^2\times x + x^2\times 1\right.\\ &\qquad \left.-1\times x^2 - 1\times x - 1\times 1\right)\left(x^2-x+1\right)\\ &= \left(x^4+x^3+x^2-x^2-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)\\ &= \left(x^4+x^3-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)\\ &= x^4\times x^2 - x^4\times x + x^4\times 1\\ &\qquad +x^3\times x^2 - x^3\times x + x^3\times 1\\ &\qquad -x\times x^2 + x\times x - x\times 1\\ &\qquad -1\times x^2 + 1\times x - 1\times 1\\ &= x^6 - x^5 + x^4 + x^5 - x^4\\ &\qquad +x^3 - x^3 + x^2 - x - x^2 + x - 1\\ &= x^6 - 1\end{aligned}$$