Exercice| [3698] | 1| Développements d'expressions algébriques

x et y sont deux nombres réels. Établir les égalités suivantes.

(1). $(x+y)^2+(x-y)^2=2\left(x^2+y^2\right)$

(2). $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

(3). $x^4+4y^4=\left((x+y)^2+y^2\right)\left((x-y)^2+y^2\right)$

Pistes de réflexion

— On mobilisera les identités remarquable pour dans un premier temps développer un des deux membres de ces égalités, pour les réduire ensuite de sorte à obtenir le second membre de l'égalité proposée.

Éléments de correction

(1). On a directement que :

$$\begin{aligned}(x+y)^2+(x-y)^2 &= \left(x^2+2\times x\times y+y^2\right)+\left(x^2-2\times x\times y+y^2\right)\\ &= \left(x^2+2xy+y^2\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)\\ &= x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2\\ &= 2x^2+2y^2\\ &= 2\left(x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

(2). On a directement que :

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= \left(x^2+2\times x\times y+y^2\right)-\left(x^2-2\times x\times y+y^2\right)\\ &= \left(x^2+2xy+y^2\right)-\left(x^2-2xy+y^2\right)\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\\ &= 4xy\end{aligned}$$

(3). On a directement que :

$$\begin{aligned}&\left((x+y)^2+y^2\right)\left((x-y)^2+y^2\right)\\ =\ &\left(x^2+2\times x\times y+y^2+y^2\right)\left(x^2-2\times x\times y+y^2+y^2\right)\\ =\ &\left(x^2+2xy+2xy^2\right)\left(x^2-2xy+2y^2\right)\\ =\ &x^2\times x^2-x^2\times 2xy+x^2+2y^2\\ &\quad +2xy\times x^2-2xy\times 2xy+2xy+2y^2\\ &\quad\quad +2y^2\times x^2-2y^2\times 2xy+2y^2\times 2y^2\\ =\ &x^4-2x^3y+2x^2y^2+2x^3y-4x^2y^2+4xy^3+2x^2y^2-4xy^3+4y^4\\ =\ &x^4+4y^4\end{aligned}$$