

Exercice [3697] | 1 | Simplifier une expression avec radical

Simplifier $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$.

Pistes de réflexion

- On commence par remarquer que $8^{10} = (2 \times 4)^{10}$ ce qui offrira une possibilité de factoriser le numérateur.
- Et on exprimera tous les termes du dénominateur à l'aide de puissances de 2 pour lui aussi pouvoir effectuer une factorisation.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned} \frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}} &= \frac{(2 \times 4)^{10} + 4^{10}}{(2^3)^4 + (2^2)^{11}} \\ &= \frac{2^{10} \times 4^{10} + 4^{10}}{2^{12} \times 4^{11}} \\ &= \frac{2^{3 \times 4} + 2^{2 \times 11}}{4^{10} (2^{10} + 1)} \\ &= \frac{2^{12} + 2^{22}}{4^{10} (2^{10} + 1)} \\ &= \frac{2^{12} (1 + 2^{10})}{4^{10} (2^{10} + 1)} \\ &= \frac{2^{12}}{(2^2)^{10}} \\ &= \frac{2^{12}}{2^{2 \times 10}} \\ &= \frac{2^{12}}{2^{20}} \\ &= \frac{2^{12}}{2^{20-12}} \\ &= 2^8 \end{aligned}$$

Or $2^8 = 2^4 \times 2^4$, donc on en déduit que $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} = 2^4$ c'est à dire que $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} = 16$.