Exercice| [3677] | 1| Étude de la compatibilité d'un système

Pour chacun des systèmes dont on donne les matrices augmentées, déterminer le rang, les inconnues principales et secondaires, et son éventuelle compatibilité.

$$\mathcal{S}_1 : \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_4 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_5 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_6 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Pistes de réflexion

- On commencera par écrire la représentation matricielle du système…
- …puis on procèdera à un échelonnement réduit en ligne de la matrice augmentée du système , pour pouvoir expliciter ensuite les solutions.

Éléments de correction

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_1$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{7}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{8}{7}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -\frac{23}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{7}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_4$ les inconnues du système $\mathcal{S}_1$, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 &= 2 + 1x_4 \\ x_2 &= -\frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{7} + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_2$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -11 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{19}{2} \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{3}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{61}{6} \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
Le système présente une équation de compatibilité :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{61}{6} & \text{Relation impossible} \end{cases}$$

Au moins une équation de compatibilité n'est pas vérifiée. Le système $\mathcal{S}_5$ est donc incompatible.

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_3$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{14}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{7}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -2L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \dots, x_3$ les inconnues du système $\mathcal{S}_3$, on en déduit les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -\frac{3}{7} \\ x_2 & = & -\frac{19}{7} \\ x_3 & = & -\frac{2}{7} \end{array}\right.$$

— On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_4$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \dots, x_4$ les inconnues du système $\mathcal{S}_4$, on en déduit les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{3}{2} \\ x_2 & = & -1 - 1x_3 \\ x_4 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

— On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_5$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang du système est donc 2.
Le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & -2 \end{array}\right. \qquad \text{Relation impossible}$$

Au moins une équation de compatibilité n'est pas vérifiée. Le système $\mathcal{S}_5$ est donc incompatible.

— On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_6$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
Le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{Relation vérifiée}$$

Le système est compatible et on poursuit l'échelonnement.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \dots, x_4$ les inconnues du système $\mathcal{S}_6$, on en déduit les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 3 - 1x_2 \\ x_2 & = & -1 \\ x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$