Exercice| [3676] | 1| Système linéaire de taille 4×4

Pour chacun des deux systèmes suivants, écrire la matrice augmentée du système, puis le résoudre :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = -11 \\ -2x - y + z + 2t = -6 \\ y + 2z + 4t = -7 \\ 2x + z + 3t = -1 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -x + 3y - 3z + 4t = -2 \\ -2x + y + 2z + 2t = 5 \\ -x + y + 2z + 2t = 6 \\ 2x - 2y + z + 2t = 10 \end{cases}$$

Pistes de réflexion

- On commencera par écrire la représentation matricielle du système...
- ...puis on procèdera à un échelonnement réduit en ligne de la matrice augmentée du système , pour pouvoir expliciter ensuite les solutions.

Éléments de correction

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_1$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -11 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -28 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -4 & 7 & -5 & 21 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{25}{3} & -\frac{49}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{11}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{11} & -\frac{182}{11} \end{array}\right)$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang du système est donc 4.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -11 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{11} & -\frac{182}{11} \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{22}{273}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{110}{91}L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{44}{91}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{11} & -\frac{182}{11} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{15}{11}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{9}{11}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{11} & -\frac{182}{11} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{11} & -\frac{182}{11} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{3}{11}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{11}{91}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_4$ les inconnues du système $\mathcal{S}_1$, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système $\mathcal{S}_1$ et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -5 & 10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{5}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{26}{5} & \frac{66}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{7}{9}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{44}{9} & \frac{88}{9} \end{array}\right)$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang du système est donc 4.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 3 & -3 & 4 & -2 \\
0 & -5 & 8 & -6 & 9 \\
0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{44}{9} & \frac{88}{9}
\end{array}\right)
\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9}{110} L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{27}{22} L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{9}{11} L_4}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 3 & -3 & 0 & -10 \\
0 & -5 & 8 & 0 & 21 \\
0 & 0 & \frac{9}{5} & 0 & \frac{18}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{44}{9} & \frac{88}{9}
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{40}{9} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{5}{3} L_3}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\
0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & \frac{9}{5} & 0 & \frac{18}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{44}{9} & \frac{88}{9}
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{5} L_2}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & \frac{9}{5} & 0 & \frac{18}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{44}{9} & \frac{88}{9}
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow -1 L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{5}{9} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{9}{44} L_4}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right)
$$

En notant $x_1, \ldots, x_4$ les inconnues du système $\mathcal{S}_2$, on en déduit les relations :

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 1 \\
x_2 & = & -1 \\
x_3 & = & 2 \\
x_4 & = & 2
\end{array}\right.
$$