

Exercice [3675] | 1 | Système linéaire et représentation matricielle

Résoudre les systèmes d'inconnues x , y et z dont les matrices augmentées sont :

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 2 & -2 & 2 & -12 \\ -1 & 3 & -2 & 11 \end{array} \right) \quad S_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Pistes de réflexion

- On commencera par écrire la représentation matricielle du système. . .
- . . . puis on procèdera à un échelonnement réduit en ligne de la matrice augmentée du système, pour pouvoir expliciter ensuite les solutions.

Éléments de correction

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système S_1 et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 2 & -2 & 2 & -12 \\ -1 & 3 & -2 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{2}L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array} \right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

En notant x_1, \dots, x_3 les inconnues du système S_1 , on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

- On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système S_2 et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{45}{2} \end{array} \right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{45}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{-15}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{-5}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{45}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{45}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\sim_L} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -1L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{15}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

En notant x_1, \dots, x_3 les inconnues du système S_2 , on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$