

Exercice [3650] | 1 | Matrice d'application linéaire

On considère l'application  $f$  donnée par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \frac{-a+d}{2}I_2 - \frac{2b+c}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On rappelle que la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est la famille formée des quatre matrices élémentaires  $E_{1,1}$ ,  $E_{1,2}$ ,  $E_{2,1}$  et  $E_{2,2}$ .

- (1). Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (2). Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (3). Déterminer le rang de  $f$ . Qu'en déduire pour  $f$  ?

Pistes de réflexion

- (1). On montrera que  $f$  est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par  $f$  est la combinaison linéaire des images.
- (2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , puis on en déterminera les images par  $f$  pour construire la matrice de  $f$  dans cette base.
- (3). On obtiendra le rang de  $A$  par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de  $f$ . Le caractère bijectif de  $f$  proviendra de la comparaison du rang de  $f$  à la dimension de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left( \begin{array}{l} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \text{est linéaire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \forall M_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array} , f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2) \right)$$

$$\text{Soient alors } \begin{cases} M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose  $M_3 = \lambda M_1 + M_2$  et en notant  $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$  on a les relations :

$$\begin{cases} a_3 = \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 = \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 = \lambda c_1 + c_2 \\ d_3 = \lambda d_1 + d_2 \end{cases}$$

Montrons que  $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$ .

Par définition de  $f$ , on a :

$$\begin{aligned} f(M_3) &= \frac{-a_3+d_3}{2}I_2 - \frac{2b_3+c_3}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-(\lambda a_1+a_2)+\lambda d_1+d_2}{2}I_2 - \frac{2(\lambda b_1+b_2)+\lambda c_1+c_2}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-\lambda a_1+\lambda d_1-a_2+d_2}{2}I_2 - \frac{2\lambda b_1+\lambda c_1+2b_2+c_2}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-\lambda a_1+\lambda d_1}{2}I_2 + \frac{-a_2+d_2}{2}I_2 - \frac{2\lambda b_1+\lambda c_1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2b_2+c_2}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-\lambda a_1+\lambda d_1}{2}I_2 - \frac{2\lambda b_1+\lambda c_1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{-a_2+d_2}{2}I_2 - \frac{2b_2+c_2}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=f(M_2)} \\ &= \lambda \underbrace{\left( \frac{-a_1+d_1}{2}I_2 - \frac{2b_1+c_1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ &= \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{aligned}$$

Par conséquent  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est linéaire, et c'est alors un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- (2). En notant  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  où  $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} f(E_{1,1}) &= \frac{-1+0}{2}I_2 - \frac{2 \times 0 + 0}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}I_2 \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}E_{1,1} - \frac{1}{2}E_{2,2} \\ f(E_{1,2}) &= \frac{-0+0}{2}I_2 - \frac{2 \times 1 + 0}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -2E_{1,1} + 1E_{1,2} + 0E_{2,1} - 1E_{2,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(E_{2,1}) &= \frac{-0+0}{2}I_2 - \frac{2 \times 0 + 1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= -1E_{1,1} + \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1} - 0\frac{1}{2}E_{2,2} \\
f(E_{2,2}) &= \frac{-0+1}{2}I_2 - \frac{2 \times 0 + 0}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}I_2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}E_{1,1} + \frac{1}{2}E_{2,2}
\end{aligned}$$

et par suite, la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(3). La matrice  $A$  étant telle que sa première colonne est identique à sa dernière colonne, elle ne peut être de rang 4 et ce dernier vaudra au plus  $3^a$ .

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\text{rg}(A) = 3$ , et par suite que  $\text{rg}(f) = 3$  puisque par théorème le rang de  $f$  est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.

Ainsi,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de rang 3. Comme  $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 2$ , d'après le théorème de caractérisation des automorphismes,  $f$  n'est pas un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

a. On poursuit la question en respectant le questionnement, mais on remarquera qu'ici, on sait que  $f$  ne pourra pas être bijective puisque ne sera pas de rang  $4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$