Exercice| [3646] | 1| Matrice d'application linéaire

On considère l'application f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{b+c}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille formée des quatres matrices élémentaires $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \text{est linéaire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall M_1 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall M_2 & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. , f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2) \right)$$

Soients alors $\left\{ \begin{array}{ccc} M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$.

On pose $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ et en notant $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_3 & = & \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 & = & \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 & = & \lambda c_1 + c_2 \\ d_3 & = & \lambda d_1 + d_2 \end{array} \right.$$

Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{aligned} f(M_3) &= \frac{a_3+d_3}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{b_3+c_3}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda a_1 + a_2 + \lambda d_1 + d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{\lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda a_1 + \lambda d_1 + a_2 + d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{\lambda b_1 + \lambda c_1 + b_2 + c_2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda a_1 + \lambda d_1}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{a_2+d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{\lambda b_1 + \lambda c_1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{b_2+c_2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda a_1 + \lambda d_1}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{\lambda b_1 + \lambda c_1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{a_2+d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{b_2+c_2}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=f(M_2)} \\ &= \underbrace{\lambda\left(\frac{a_1+d_1}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{b_1+c_1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ &= \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{aligned}$$

Par conséquent $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est linéaire, et c'est alors un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). En notant $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} f(E_{1,1}) &= \frac{1+0}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{0+0}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}E_{1,1} + \frac{1}{2}E_{2,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(E_{1,2}) &= \frac{0+0}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{1+0}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}E_{1,1} + \frac{1}{2}E_{1,2} + \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{2,2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f\left(E_{2,1}\right) &= \frac{0+0}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{0+1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}E_{1,1} + \frac{1}{2}E_{1,2} + \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{2,2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(E_{2,2}\right) &= \frac{0+1}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{0+0}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{I}_2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}E_{1,1} + \frac{1}{2}E_{2,2}
\end{aligned}
$$

et par suite, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$
A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

(3). La matrice A étant telle que sa première colonne est identique à sa dernière colonne, elle ne peut être de rang 4 et ce dernier vaudra au plus 3. Par ailleurs, sa deuxième colonne est colinéaire à sa deuxième colonne, mais n'est pas colinéaire à sa première colonne, on en déduit que le rang de A est exactement 2.

On en déduit donc que $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, et par suite que $\mathrm{rg}\,(f) = 2$ puisque par théorème le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.

Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 2. Comme $\dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right) = 2$, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes, f n'est pas un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.