Exercice| [3641] | 1| Matrice d'application linéaire

On considére l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \longmapsto & (3x+1)P - (x^2+x-1))P' \end{array} \right.$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.

(3). Déterminer le rang de A. Qu'en déduire pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans cette base.

(3). On obtiendra le rang de A par échelonnement en ligne de la matrice, et par théorème, ce dernier est égal au rang de f. Le caractère bijectif de f proviendra de la comparaison du rang de f à la dimension de $\mathbb{R}_3[x]$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ \text{est linéaire} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall P_1 & \in & \mathbb{R}_3[x] \\ \forall P_2 & \in & \mathbb{R}_3[x] \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. , f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2) \right)$$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{rcl} P_1 : x \longmapsto c_1 + b_1 x + a_1 x^2 & \in & \mathbb{R}_3[x] \\ P_2 : x \longmapsto c_2 + b_2 x + a_2 x^2 & \in & \mathbb{R}_3[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$.

On pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

Montrons que $f(P_3) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(P_3) & = & (3x+1) P_3 - (x^2+x-1) P_3' \\ & = & (3x+1)(\lambda P_1 + P_2) - (x^2+x-1)(\lambda P_1 + P_2)' \\ & = & \lambda (3x+1) P_1 + (3x+1) P_2 - (x^2+x-1)(\lambda P_1' + P_2') \\ & = & \lambda (3x+1) P_1 + (3x+1) P_2 - \lambda (x^2+x-1) P_1' - (x^2+x-1) P_2' \\ & = & \lambda (3x+1) P_1 - \lambda (x^2+x-1) P_1' + \underbrace{(3x+1) P_2 - (x^2+x-1) P_2'}_{=f(P_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{(3x+1) P_1 - (x^2+x-1) P_1'}_{=f(P_1)} + f(P_2) \\ & = & \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{array}$$

Par conséquent $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ est linéaire, et c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). En notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ où $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$, $P_2 : x \longmapsto x^2$ et $P_3 : x \longmapsto x^3$, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(P_0) & = & (3x+1) \times 1 - (x^2+x-1) \times 0 \\ & = & 1 + 3x \\ f(P_1) & = & (3x+1) \times x - (x^2+x-1) \times 1 \\ & = & 3x^2 + x - x^2 - x + 1 \\ & = & 1 + 2x^2 \\ f(P_2) & = & (3x+1) \times x^2 - (x^2+x-1) \times 2x \\ & = & 3x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x \\ & = & 2x - x^2 + x^3 \\ f(P_3) & = & (3x+1) \times x^3 - (x^2+x-1) \times 3x^2 \\ & = & 3x^4 + x^3 - 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 \\ & = & 3x^2 - 2x^3 \end{array}$$

et par suite, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(3). On obtient le rang de la matrice A par un échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3} L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(A) = 4$, et par suite que $\mathrm{rg}(f) = 4$ puisque par théorème le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.

Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ de rang 4. Comme $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.