Exercice| [3638] | 1| Base et noyau d'une application linéaire

On note $\mathcal{B}_4 = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère alors f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Pistes de réflexion

- On pourra directement utilser la représentation matricielle de f ou revenir grâce à cette dernière à l'expression analytique de f.
- On commencera par chercher une base du noyau, ce qui à l'aide du théorème du rang, nous donnera la dimension de l'image.
- La recherche du noyau pourra être ramenée à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f)$.

Éléments de correction

Recherche du noyau de f : par définition, on a :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ f(x) = \overrightarrow{0}\right\}$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ quelconque de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{Ker}(f)) & \Leftrightarrow (AX = (0)) \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution du système de} \\ \text{représentation matricielle } (A|0) \end{array} \right) \end{aligned}$$

On résout le système de représentation matricielle $(A|0)$ par échelonnement en lignes :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{Ker}(f)) & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_4 \\ x_2 & = & -x_4 \\ x_3 & = & -x_4 \\ x_4 & = & x_4 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow (x \in \mathrm{Vect}((1, 1, 1, -1))) \end{aligned}$$

et par suite : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1, -1))$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Utilisation du théorème du rang : d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=1} + \mathrm{rg}(f)$$

et ainsi $\mathrm{rg}(f) = 3$.

Recherche d'une base de $\mathrm{Im}(f)$: La famille $\mathcal{B}_4$ étant une base de $\mathbb{R}^4$, elle est en particulier génératrice de $\mathbb{R}^4$, et par théorème, il vient que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

On remarque que : $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

Comme $\mathrm{rg}(f) = 3$, par définition $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une famille génératrice de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension 3, donc par théorème, elle en forme une base.