

Exercice [3637] | 1 | Base et noyau d'une application linéaire

On note $\mathcal{B}_4 = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On considère alors f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f .

Pistes de réflexion

- On pourra directement utiliser la représentation matricielle de f ou revenir grâce à cette dernière à l'expression analytique de f .
- On commencera par chercher une base du noyau, ce qui à l'aide du théorème du rang, nous donnera la dimension de l'image.
- La recherche du noyau pourra être ramenée à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_4}(f)$.

Éléments de correction

Recherche du noyau de f : par définition, on a :

$$\text{Ker}(f) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, f(x) = \vec{0} \right\}$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ quelconque de \mathbb{R}^4 , on a :

$$\begin{aligned} (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker}(f)) &\Leftrightarrow (AX = (0)) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution du système de} \\ \text{représentation matricielle } (A|0) \end{array} \right) \end{aligned}$$

On résout le système de représentation matricielle $(A|0)$ par échelonnement en lignes :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_1}]{\sim L} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{4}L_2}]{\sim L} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_2}]{\sim L} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{4}L_2}]{\sim L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker}(f)) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x \in \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))) \end{aligned}$$

et par suite : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$

La famille $\mathcal{K} = \{(0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ est formée de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc par théorème, elle forme une famille libre.

Par suite, \mathcal{K} est une base de $\text{Ker}(f)$.

Par ailleurs, la dimension de $\text{Ker}(f)$ étant égale au nombre de vecteurs d'une de ses bases, on en déduit que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

Utilisation du théorème du rang : d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{=4} = \underbrace{\dim(\text{Ker}(f))}_{=2} + \text{rg}(f)$$

et ainsi $\text{rg}(f) = 2$.

Recherche d'une base de $\text{Im}(f)$: La famille \mathcal{B}_4 étant une base de \mathbb{R}^4 , elle est en particulier génératrice de \mathbb{R}^4 , et par théorème, il vient que :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

Or on remarque trivialement que $f(e_4) = -f(e_1)$ et $f(e_3) = -f(e_2)$.

Par suite, on a : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$

Par définition, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$, donc $\text{Im}(f)$ est un espace de dimension 2.

La famille $\mathcal{F} = \{f(e_1), f(e_2)\}$ est une famille génératrice de 2 vecteurs de $\text{Im}(f)$ qui est lui même un espace de dimension 2, donc par théorème, elle forme une base de $\text{Im}(f)$.