Exercice| [3633] | 1| Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que f est une application linéaire.

(2). Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

(4). Qu'en conclure pour f ?

Pistes de réflexion

(1). On montrera que f est linéaire en s'assurant que l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

(2). On identifiera les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, puis on en déterminera les images par f pour construire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}^3$.

(3). On pourra soit commencer par identifier les éléments du noyau de f pour en déduire par le théorème du rang la dimension de l'image, et il restera à exploiter le caractère générateur de la famille formée par les images de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ pour en extraire une famille libre, soit commencer par déterminer le rang de f par échelonnement de sa matrice, pour toujours récupérer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$, et déterminer ensuite les éléments du noyau soit par le calcul, soit par contemplation.

(4). Le rang de f ou le contenu du noyau de f permettra de s'assurer du caractère bijectif ou non de f.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{est linéaire} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{ccc} \forall P_1 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \forall P_2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. , f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)\right)$$

Soient alors $\left\{\begin{array}{ccc} P_1 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ P_2 & \in & \mathbb{R}_2[x] \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$.

On pose $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

Montrons que $f(P_3) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{aligned} f(P_3) &= ((\lambda P_1 + P_2)(-1), (\lambda P_1 + P_2)(0), (\lambda P_1 + P_2)(1)) \\ &= (\lambda P_1(-1) + P_2(-1), \lambda P_1(0) + P_2(0), \lambda P_1(1) + P_2(1)) \\ &= (\lambda P_1(-1), \lambda P_1(0), \lambda P_1(1)) + \underbrace{(P_2(-1), P_2(0), P_2(1))}_{=f(P_2)} \\ &= \lambda \underbrace{(P_1(-1), P_1(0), P_1(1))}_{=f(P_1)} + f(P_2) \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

Par conséquent $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire.

(2). En notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ où $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$ et $P_2 : x \longmapsto x^2$ un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} f(P_0) &= (1,1,1) \\ f(P_1) &= (-1,0,1) \\ f(P_2) &= (1,0,1) \end{aligned}$$

et par suite, la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3). Recherche du rang de f : par théorème, $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(A)$.

On obtient le rang de la matrice A par un échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}\,(A) = 3$, et par suite que $\mathrm{rg}\,(f) = 3$ puisque par théorème le rang de f est égal au rang d'une de ses représentations matricielles.

On en déduit notamment par définition du rang que $\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$.

Recherche d'une base de $\mathrm{Im}\,(f)$: puisque $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, elle en forme une famille génératrice, et par théorème, on a :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2))$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = \{f(P_0), f(P_1), f(P_2)\}$ est une famille génératrice de 3 vecteurs de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est un espace de dimension 3, donc par théorème, elle forme une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Dimension et base du noyau de f : d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim\,(\mathbb{R}_2[x])}_{=3} = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \underbrace{\mathrm{rg}\,(f)}_{=3}$$

et par sute, il vient que $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) = 0$, ce qui implique que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{\tilde{0}\}$.

(4). f étant une application linéaire de rang 3 de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui sont tous les deux des espaces de dimension 3, d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes, f est un isomorphisme.