Exercice| [3623] | 1| Sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pistes de réflexion

- On commencera par vérifier que F est bien un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire la matrice nulle.
- Pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de F.

Éléments de correction

F est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: par construction de F

Le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à F : en effet, la matrice nulle est telle que : $A(0) = (0)$ et $(0)A = (0)$ ce qui amène que $A(0) = (0)A$ et donc que $(0) \in F$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} M_1 & \in & F \\ M_2 & \in & F \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{cases}$.

Posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$, et montrons que $M_3 \in F$, c'est à dire que $AM_3 = M_3 A$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} AM_3 &= A(\lambda M_1 + M_2) \\ &= \lambda \underbrace{AM_1}_{\substack{=MA_1 \\ \textbf{car } M_1 \in F}} + \underbrace{AM_2}_{\substack{=MA_2 \\ \textbf{car } M_1 \in F}} \\ &= \lambda M_1 A + M_2 A \\ &= (\lambda M_1 + M_2) A \\ &= M_3 A \end{aligned}$$

ce qui assure que $M_3 \in F$.