

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $M$  est inversible et en calculer son inverse.

## Pistes de réflexion

- Puisque  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $M$  est inversible si et seulement si son rang est égal à 3, rang que l'on obtient par échelonnement en lignes de la matrice  $M$ .
- On obtient l'inverse de la matrice  $M$  par échelonnement en lignes de la matrice augmentée  $(M|I_3)$ .

## Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identité afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\sim L \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.

On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\sim L \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\sim L \\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\sim L \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{L'inverse de la matrice est ainsi : } \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$