Exercice| [3582] | 1| Matrices

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que M est inversible, puis déterminer M^{-1}.

(2). En déduire une matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Pistes de réflexion

(1). Puisque $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, M est inversible si et seulement si son rang est égal à 3, rang que l'on obtient par échelonnement en lignes de la matrice M. On obtient ensuite l'inverse de la matrice M par échelonnement en lignes de la matrice augmentée $(M|I_3)$.

(2). On isole dans le membre de gauche la matrice X en multipliant à droite cette relation par l'inverse de la matrice M pour obtenir l'expression de la matrice inconnue X.

Éléments de correction

(1). On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2). La matrice M étant inversible, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\left(2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) &\Leftrightarrow \left(XM = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(XMM^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$