Exercice| [3581] | 1| Matrices

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que M est inversible, puis calculer M^{-1}.

(2). En déduire la résolution du système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x_1 - x_3 = m \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2m \end{cases}$ où m est un réel quelconque.

Pistes de réflexion

(1). Puisque $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, M est inversible si et seulement si son rang est égal à 3, rang que l'on obtient par échelonnement en lignes de la matrice M. On obtient ensuite l'inverse de la matrice M par échelonnement en lignes de la matrice augmentée $(M|I_3)$.

(2). On écrit ce système sous la forme $MX = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dont les solutions sont données par le résultat du produit $X = M^{-1}\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

(1). On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(2). On peut écrire que :

$$\begin{aligned}
& (\,(x_1, x_2, x_3) \text{ est solution de } \mathcal{S}\,) \\
\Leftrightarrow\; & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} \right) \\
\Leftrightarrow\; & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} \right) \\
\Leftrightarrow\; & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} \right) \\
\Leftrightarrow\; & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m-1 \\ -2m+1 \\ 4m-1 \end{pmatrix} \right) \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} x_1 = 5m-1 \\ x_2 = -2m+1 \\ x_3 = 4m-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

et ainsi l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est : $\{(5m-1, -2m+1, 4m-1)\}$.