Exercice| [3580] | 1| Matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Calculer $A^3 - A$, en déduire que A est inversible.

(2). Déterminer A^{-1}.

Pistes de réflexion

(1). On procède au calcul direct de $A^3 - A$ et on obtient une expression polynomiale en la matrice A qui permettra d'écrire une relation du type $A \times B = \mathrm{I}_3$ ce qui assurera l'inversibilité de la matrice A.

(2). On exploite la factorisation précédente pour obtenir directement l'inverse de A.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

et par suite, on a :

$$\begin{aligned} A^3 - A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 4\mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $A^3 - A = 4\mathrm{I}_3$, ce qui permet d'écrire que : $A\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right) = 4\mathrm{I}_3$.

Finalement, il vient que : $A \times \left(\frac{1}{4}\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right)\right) = \mathrm{I}_3$

Par suite, il existe une matrice $B = \frac{1}{4}\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right)$ telle que $AB = \mathrm{I}_3$.

Ainsi, la matrice A est inversible à droite, donc inversible, et d'inverse la matrice $B = \frac{1}{4}\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right)$.

(2). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$