Exercice| [3579] | 1| Matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1). Montrer que A^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de A et I_3.

(2). En déduire que A est inversible et en détérminer son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On procède au calcul direct de A^2 que l'on décompose comme somme des matrices A et I_3.

(2). On obtient une expression polynomiale en la matrice A qui permettra d'écrire une relation du type $A \times B = \mathrm{I}_3$ ce qui assurera l'inversibilité de la matrice A.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 5 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 5A - 4\mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

(2). De la question précédente, on en déduit que $A^2 - 5A = -4\mathrm{I}_3$.

Par suite, il vient que : $A(A - 5\mathrm{I}_3) = -4\mathrm{I}_3$

et finalement que : $A \times \left(-\frac{1}{4}(A - 5\mathrm{I}_3)\right) = \mathrm{I}_3$.

Par suite, il existe une matrice $B = -\frac{1}{4}(A - 5\mathrm{I}_3)$ telle que $AB = \mathrm{I}_3$.

Ainsi, la matrice A est inversible à droite, donc inversible, et d'inverse la matrice $B = -\frac{1}{4}(A - 5\mathrm{I}_3)$.

Finalement, il vient que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{4}(A - 5\mathrm{I}_3) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$