Exercice| [3569] | 1| Calcul d'intégrale

Calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(x^2 + 2x - 1\right) \sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

Pistes de réflexion

— On procède à deux intégrations par parties successives en faisant le choix d'abaisser le degré du facteur polynomial.

Éléments de correction

On effectue l'intégration par parties suivante en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \sin(2x) \\ v(x) = x^2 + 2x - 1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 2x + 2 \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(x^2 + 2x - 1\right) \sin(2x) dx &= \left[-\frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - 1\right)\cos(2x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\cos(2x) \times (2x+2)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (x+1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \cos(2x) \\ v(x) = x + 1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 1 \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(x^2 + 2x - 1\right) \sin(2x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2}(x+1)\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\ &\quad - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[(x+1)\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(x^2 + 2x - 1\right)\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[(x+1)\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\left(\pi^2 + \pi - 1\right)\cos(2\times\pi) - \left(0^2 + 0 - 1\right)\cos(2\times 0)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left((\pi+1)\sin(2\times\pi) - (0+1)\sin(2\times 0)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2\times\pi) + \frac{1}{2}\cos(2\times 0)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\pi^2 + 2\pi\right) + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\pi^2 - \pi \end{aligned}$$