Exercice| [3501] | 1| Histoire de mariage

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent chacune l'héritier de leur duché.
On considère les trois événements suivants :
— A : « l'héritier d'Aquitaine est un garçon »
— B : « l'héritier de Bourgogne est un garçon »
— C : « les duchés vont pouvoir faire alliance en mariant les enfants attendus »
On suppose que le fait d'avoir un garçon ou une fille est équiprobable.
Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Pistes de réflexion

Éléments de correction

Étude de l'indépendance deux à deux : On a directement que : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.

Il est clair que : $C = \left(A \cap \overline{B}\right) \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disjointe}}}{\cup} \left(\overline{A} \cap B\right)$

Ainsi, il vient que : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$

Indépendance de A et B : il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Il est immédiat que : $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Indépendance de A et C : il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$.
Puisque A et B sont indépendants, il en est de même pour A et $\overline{B}$ et pour $\overline{A}$ et B.
Ainsi, il vient :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}(B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et ainsi, on a : $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs, comme $C = \left(A \cap \overline{B}\right) \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disjointe}}}{\cup} \left(\overline{A} \cap B\right)$ on a :

$$\begin{aligned} A \cap C &= A \cap \left(A \cap \left(\overline{B}\right) \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disjointe}}}{\cup} \left(\overline{A} \cap B\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(A \cap A \cap \overline{B}\right)}_{=A \cap \overline{B}} \cup \underbrace{\left(A \cap \overline{A} \cap B\right)}_{=\varnothing} \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

et qui assure que $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$

Indépendance de B et C : même principe de raisonnement que pour A et C

Étude de l'indépendance mutuelle : il s'agit de vérifier en plus si $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$, ce qui compte-tenu du questionnement, ne devrait pas être le cas.

Un calcul direct donne que : $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= A \cap \left(\left(A \cap B\right)\left(\overline{B}\right) \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disjointe}}}{\cup} \left(\overline{A} \cap B\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(A \cap B \cap A \cap \overline{B}\right)}_{=\varnothing} \cup \underbrace{\left(A \cap B \cap \overline{A} \cap B\right)}_{=\varnothing} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.