Exercice| [3475] | 1| Sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(1). Donner un exemple de matrice appartenant à F.

(2). La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à F ? Et la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$?

(3). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(4). Montrer que $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Que retrouve-t-on pour F ?

(5). Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre.

Qu'en déduire pour F ?

Pistes de réflexion

(1). On se contentera de choisir une valeur au couple (a,b) et de construire une matrice à partir de ce dernier à partir du « modèle » des éléments de F.

(2). On fait le travail inverse ici : on essaie de décomposer les coefficients des matrices proposées de sorte qu'ils s'obtiennent à partir d'un couple de valeurs qu'il convient de déterminer et sur le mode de construction des éléments de F.

(3). On commencera par vérifier que F est bien un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de F.

(4). Il suffit de décomposer la forme des éléments de F pour les voir comme combinaison linéaire de deux matrices, qui donneront donc la famille génératrice proposée.

(5). Le fait qu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs simplifie grandement l'obtention de son caractère libre.

Éléments de correction

(1). En prenant $(a,b) = (1,1)$, on trouve que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2\times 1+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ appartient à F puisque de la forme $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ avec $a=1$ et $b=1$.

(2). Si $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ appartenait à F, par indentification des coefficients, on devrait avoir $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1+2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui n'est clairement pas le cas. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \notin F$.

Par contre, on remarque que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\times 2+1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ autrement dit en posant $a=2$ et $b=1$, on a $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in F$.

(3). **F est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:** par construction de F

Le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à F : en effet, en posant $a=0$ et $b=0$, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 2\times 0+0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc la matrice nulle appartient bien à F.

Stabilité de F par combinaison linéaire : Soient $\left\{ \begin{array}{ccc} M_1 & \in & F \\ M_2 & \in & F \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$

Posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ et montrons que $M3 \in F$, c'est à dire qu'il existe $(a_3, b_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 2a_3+b_3 \\ -b_3 & -a \end{pmatrix}$.

Puisque $M_1 \in F$, il existe $(a_1,b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 2a_1+b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

De même, puisque $M_2 \in F$, il existe $(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 2a_2+b_2 \\ -b_2 & -a_2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, par construction, on a :

$$\begin{aligned} M_3 &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 2a_1+b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 2a_2+b_2 \\ -b_2 & -a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda(2a_1+b_1) + 2a_2 + b_2 \\ -\lambda b_1 - b_2 & -\lambda a_1 - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & 2(\lambda a_1 + a_2) + \lambda b_1 + b_2 \\ -(\lambda b_1 + b_2) & -(\lambda a_1 + a_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_3 = \lambda a_1 + a_2$ et $b_3 = \lambda b_1 + b_2$, il vient : $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 2a_3+b_3 \\ -b_3 & -a_3 \end{pmatrix}$ ce qui signifie bien que $M_3 \in F$.

(4). Il est clair que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par suite, F est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire que l'on a $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Par ailleurs, F pouvant être décrit comme étant un sous-espace engendré par une famille de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ce dernier est un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(5). La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est formée de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc par théorème, cette dernière est sun famille libre.

Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre et génératrice de F, donc par définition, elle en forme une base.

Comme la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F, le nombre de vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ est égal à la dimension de F, ce qui amène à $\dim(F) = 2$.