Exercice| [3461] | 1| Changement de base

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P = ax^2 + bx + c & \longmapsto & (3c - b + a) + (2c + a)x + ax^2 \end{array} \right.$.

On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(1). Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Soit $P_0 = 1 + x - x^2$, $P_1 = x + x^2$ et $P_2 = 1 + x$.

- **(a).** Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
- **(b).** Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(3). On admet que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(4). f est-il un automorphisme ?

Pistes de réflexion

(1). On déterminera les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ pour construire la matrice de f dans cette base.

(2). (a). On pourra obtenir le caractère base de cette famille en étudiant le rang de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b). La matrice de passage cherchée est en fait déjà écrite. . .

(3). On mobilisera la formule de changement de base pour les endomorphismes, qui demandera ici le calcul de l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(4). On pourra facilement récupérer le caractère inversible d'une des représentations matricielles de f, ce qui assurera son caractère bijectif d'après le théorème de caractérisation des automorphismes.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & (3 \times 1 - 0 + 0) + (2 \times 1 + 0)x + 0 \times x^2 \\ & = & 3 + 2x \\ f(x) & = & (3 \times 0 - 1 + 0) + (2 \times 0 + 0)x + 0 \times x^2 \\ & = & -1 \\ f(x^2) & = & (3 \times 0 - 0 + 1) + (2 \times 0 + 1)x + 1 \times x^2 \\ & = & 1 + x + x^2 \end{array}$$

et par suite, on a donc : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2). (a). Puisque $\mathbb{R}_2[x]$ est un espace de dimension 3 et que $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs, en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, par théorème, on a :

$$(\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x]) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}(M) = 3)$$

Par définition, on a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient le rang de M par échelonnement en lignes de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice M est de rang 3, et par suite, que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b). Par définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, on a : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Ainsi, on a : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

que l'on notera simplement P par la suite.

(3). En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, la formule de changement de base pour les endmorphismes donne la relation :

$$A' = P^{-1}AP$$

Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{array}{rcl} A' & = & P^{-1}AP \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(4). D'après le théorème de caractérisation des automorphismes :

$$\left(\begin{array}{c} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x]) \\ \text{est bijective} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Une de ses représentations} \\ \text{matricielle est inversible} \end{array} \right)$$

La matrice A' est une matrice diagonale et dont tous les termes diagonaux sont non nuls. Par théorème, elle est inversible.

A' étant une représentation matricielle de f, on en déduit que f est bijective, et par suite, que c'est un automorphisme.