Exercice| [3458] | 1| Changement de base dans $\mathbb{R}^3$

Soient $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ où u_1, u_2 et u_3 sont exprimés dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(2). Exprimer les coordonnées de $u = (1, 4, 7)$ donné dans $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra obtenir le caractère base de cette famille en étudiant le rang de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et la matrice de passage cherchée est en fait déj'a écrite...

(2). On mobilisera la formule de changement de base pour les vecteurs, qui demandera ici le calcul de l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Éléments de correction

(1). **Caractère base de $\mathcal{B}'$:** Puisque $\mathbb{R}^3$ est un espace de dimension 3 et que $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, par théorème, on a :

$$(\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x]) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\,(A) = 3)$$

Par définition, on a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient le rang de A par échelonnement en lignes de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice A est de rang 3, et par suite, que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: Par définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, on a : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$.

Ainsi, on a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2). Pour la suite, on notera simplement $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

En notant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de u dans la base $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de u dans la base $\mathcal{B}'$, d'après les formules de changement de base pour les vecteurs, on a la relation :

$$X = P \times X' \text{ ou encore } X' = P^{-1} \times X$$

On recherche la matrice P^{-1} en procédant à un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice P est ainsi : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Par suite, il vient que :

$$\begin{aligned} X' &= P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 4 + (-2) \times 7 \\ -2 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 7 \\ 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 2 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par conséquent, on a : $u = -3u_1 + 3u_2 + 4u_3$ ce qui signifie que $u = (-3, 3, 4)_{\mathcal{B}'}$.