Exercice| [3457] | 1| Base et matrice de passage

Soit $P_0 : x \longmapsto 1+x$, $P_1 : x \longmapsto x+x^2$ et $P_3 : x \longmapsto 1+x+x^2$ et on note $\mathcal{B} = \left(1, x, x^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(1). Vérifier que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Écrire alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra obtenir le caractère base de cette famille en étudiant le rang de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). La matrice de passage cherchée est en fait déj'a écrite à la question précdente.

Éléments de correction

(1). Puisque $\mathbb{R}_2[x]$ est un espace de dimension 3 et que $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(P_0, P_1, P_2\right)$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, par théorème, on a :

$$\left(\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x]\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\,(A) = 3)$$

Par définition, on a : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient le rang de A par échelonnement en lignes de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice A est de rang 3, et par suite, que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Par définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, on a : $\quad P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(P_0, P_1, P_2\right)$.

Ainsi, on a : $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.