Exercice| [3449] | 1| Avec des polynômes

Soit $\varphi : \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \longmapsto & 2\left(x^2-x+1\right)P-\left(x^3+1\right)P'(x+1) \end{array}\right.$.

On admet que $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_3[x]\right)$.

Écrire la matrice M de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}_3[x]$.

Pistes de réflexion

— On obtient la matrice de φ par calcul des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ que l'on exprime dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

— On met ensuite en forme la matrice de f à partir de ces calculs d'images.

Éléments de correction

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ où :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0 : & x \longmapsto & 1 \\ P_1 : & x \longmapsto & x \\ P_2 : & x \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$$

et $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ où l'on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q_0 : & x \longmapsto & 1 \\ Q_1 : & x \longmapsto & x \\ Q_2 : & x \longmapsto & x^2 \\ Q_3 : & x \longmapsto & x^3 \end{array}\right.$$

Un calcul direct donne que : $$\begin{array}{rcl} \varphi(P_0) & = & 2\left(x^2-x+1\right)\times 1-\left(x^3+1\right)\times 0 \\ & = & 2\left(x^2-x+1\right) \\ & = & 2x^2-2x+2 \\ & = & 2\times Q_0-2\times Q_1+2\times Q_2+0\times Q_3 \end{array}$$

De même : $$\begin{array}{rcl} \varphi(P_1) & = & 2\left(x^2-x+1\right)\times x-\left(x^3+1\right)\times 1 \\ & = & \left(2x^2-2x+2\right)\times x-x^3-1 \\ & = & 2x^3-2x^2+2x-x^3+1 \\ & = & 1+2x-2x^2+x^3 \\ & = & 1\times Q_0+2\times Q_1-2\times Q_2+1\times Q_3 \end{array}$$

et pour terminer : $$\begin{array}{rcl} \varphi(P_2) & = & 2\left(x^2-x+1\right)\times x^2-\left(x^3+1\right)\times 2(x+1) \\ & = & \left(2x^2-2x+1\right)\times x^2-2\left(x^4+x^3+x+1\right) \\ & = & 2x^4-2x^3+x^2-2x^4-2x^3-2x-2 \\ & = & -2-2x+x^2-4x^3 \\ & = & -2\times Q_0-2\times Q_1+1\times Q_2-4\times Q_3 \end{array}$$

On en déduit donc que la matrice $\mathrm{Mat}(\varphi)$ dans les bases canoniques de ces deux espaces est :

$$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$